

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina

Nº5, 2008



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor: Lúcio José Botelho

Vice-Reitor: Ariovaldo Bozan

PRÓ-REITORIA DE CULTURA E EXTENSÃO - PRCE

Pró-Reitora: Eunice Sueli Nodari

DEPARTAMENTO DE APOIO À EXTENSÃO - DAEx

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO - PREG

Pró-Reitor: Marcos Laffin

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Mércles Thadeu Moretti

Vice-Diretor: Tarciso Antônio Grandi

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Rosimary Pereira

Sub-Chefe: Nereu Estanislau Burin

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA**

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -

v.: 5 (2008) 23 cm

Annual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas,
exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas.

Comissão da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina:

Coordenador: José Luiz Rosas Pinho.

Professores: Carmem Suzane Comitre Gimenez, Eliezer Batista, Licio Hernanes Bezerra, Nereu Estanislau Burin e Waldir Quandt.

Bolsistas da olimpíada: Anny Madruga da Silva, Edson Luiz Valmorbida, Mateus Medeiros Teixeira e Tatiana Sprandel.

Bolsistas do PET - Matemática: Anelize Zomkowski Salvi, Asteroide Santana, Deividi Ricardo Pansera, Ecila de Almeida Waltrick, Gustavo Felisberto Valente, Helena Martins, Leonardo Koller Sacht, Máira Fernandes Gauer, Paulo Ricardo Boff, Rafaela Goulart de Andrade, Soyara Carolina Biazotto, Thiane Pereira Poncetta Coliboro, Tiara Martini, Viviam Giacomelli Pedroso.

Comitê Editorial da Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina:

Helena Martins
José Luiz Rosas Pinho
Licio Hernanes Bezerra
Paulo Ricardo Boff
Thiane Pereira Poncetta Coliboro
Tiara Martini

Editoração Eletrônica:

Alda Dayana Mattos
Helena Martins
Rodrigo Maciel Rosa
Thiane Pereira Poncetta Coliboro
Tiara Martini

Tiragem:

1500 exemplares

Arte da Capa:

Renata Leandro Becker
Asteroide Santana

Postagem:

Segundo semestre de 2007.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina N°5, 2008

ISSN 1679-7612

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Apresentação | 7 |
| IX ORM (2006) | 9 |
| Nível 1 | 11 |
| Nível 2 | 13 |
| Nível 3 | 15 |
| Gabarito Nível 1 | 17 |
| Gabarito Nível 2 | 21 |
| Gabarito Nível 3 | 26 |
| Premiados | 32 |
| Nível 1 | 32 |
| Nível 2 | 34 |
| Nível 3 | 36 |
| Escolas Participantes | 37 |
| Artigo | 45 |
| Algumas propriedades notáveis das cônicas Gustavo A. T. F. da Costa | 47 |
| Artigo | 57 |
| “Anatomia” de uma solução José Luiz Rosas Pinho | 59 |
| Artigo | 67 |
| Princípio da Balança de Arquimedes Asteroide Santana | 69 |

| | |
|--|------------|
| Artigo | 81 |
| Uma extensão do Teorema de Steiner-Lehmus | |
| Paulo Ricardo Boff | 83 |
| Soluções dos problemas propostos | 91 |
| Problemas propostos | 99 |
| Outras olimpíadas | 105 |
| Informações gerais | 109 |
| Envio de Problemas e Soluções | 111 |
| Envio de Artigos | 111 |
| Cadastramento | 111 |
| Como adquirir a revista | 111 |
| Erramos | 112 |
| Fale Conosco | 112 |

Apresentação

No ano em que lançamos o quinto número desta revista comemoramos a realização da X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM). Nesses dez anos houve uma evolução razoável. De 800 participantes de 7 escolas em 1998, passamos a 16000 participantes de 263 escolas do estado em 2007. Isso sem contar os resultados em outras olimpíadas. Alunos de Santa Catarina já obtiveram duas medalhas de ouro e cinco de prata (e mais algumas de bronze e menções honrosas) na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), e um aluno foi medalhista de ouro na Olimpíada do Cone Sul, uma olimpíada internacional.

Esta revista é o resultado de um projeto de extensão do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), inteiramente realizado por alunos bolsistas do Programa de Educação Tutorial (PET) do Curso de Matemática, alunos com bolsas de extensão do projeto da ORM e com a participação de professores daquele departamento. Ela foi totalmente financiada (custos de edição) pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que também financiou parte da X ORM.

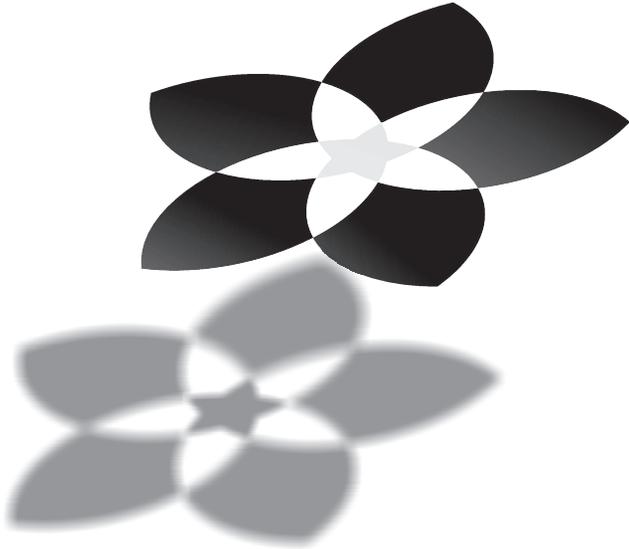
Neste quinto número, são discutidas as provas da 2ª fase da *IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* (ORM), realizada em 2006, com suas respectivas soluções. Quatro artigos são aqui apresentados: dois deles escritos por ex-integrantes do PET, e dois artigos escritos por professores do Departamento de Matemática da UFSC. A revista apresenta ainda as seções de problemas propostos e de soluções de problemas propostos anteriormente.

Esta revista é distribuída gratuitamente às escolas que já participam e aquelas interessadas em participar da ORM. Mantemos a expectativa de que, através das bibliotecas dessas escolas, um grande número de estudantes possa ser atingido, e que o interesse por esse tipo saudável de competição aumente cada vez mais em nosso estado e em todo o país.

Florianópolis, 1 de dezembro de 2007.

José Luiz Rosas Pinho

Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina



IX ORM (2006)

Nível 1

1. Considere a seqüência numérica:

26, 2006, 202606, 20200606,

cujo primeiro número é igual a 26 e onde são introduzidos, para os números seguintes, alternadamente dois zeros entre os algarismos 2 e 6 centrais, e 26 entre os dois algarismos zero centrais. Acima estão os quatro primeiros números dessa seqüência.

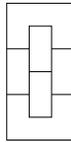
Calcule a soma de todos os algarismos do 2006^o número da seqüência.

2. Com dois tipos de blocos, um no formato de um **U**, e outro retangular, construímos ordenadamente 1000 peças. As três primeiras são mostradas abaixo:

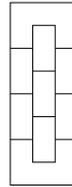
1^a peça



2^a peça



3^a peça



Calcular o número de retângulos que serão utilizados na 1000^a peça.

3. Listar todos os números palíndromos de 5 algarismos que são pares e divisíveis por 3, e cuja soma de seus algarismos seja um número palíndromo. (Observação: um número é dito palíndromo quando lido da esquerda para direita e lido da direita para a esquerda resulta no mesmo número; por exemplo, 14741 é um número palíndromo de cinco algarismos, e 5335 é um palíndromo de quatro algarismos).
4. Em um país os gatos falam, e se alimentam somente de camundongos. No país só há dois tipos de camundongos: pretos e brancos. Em uma casa do país há três gatos: Chatun, Chadê e Chatruá. Eles são gatos muito especiais. Chatun come somente camundongos pretos na segunda, quarta e sexta-feira, e brancos nos outros dias da semana. Chadê come camundongos pretos na terça, quinta e sábado, e brancos nos outros dias da semana. Chatruá come camundongos

pretos nos dias da semana que começam com “s”, e brancos nos outros dias da semana.

Em um certo dia cada um dos gatos fala uma frase.

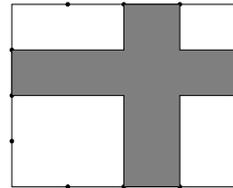
Chatun diz: “Comi um camundongo branco ontem”.

Chadê diz: “Comi um camundongo preto ontem”.

Chatruá diz: “Não comi um camundongo branco ontem”.

Que dia da semana é esse?

5. Uma bandeira retangular contém o desenho de uma cruz que é obtida dividindo-se os lados desse retângulo em quatro partes iguais e traçando-se duas faixas, conforme a figura ao lado.

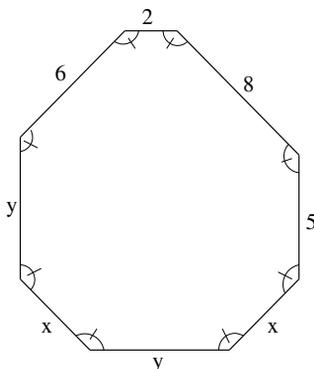


Calcular a razão entre a área da cruz cinza e a área da bandeira.

Você Sabia? Celebrou-se em 2007 o tricentenário do nascimento de Leonhard Euler (1707-1783). Este prolífico e muitíssimo influente matemático (“o mestre de nós todos”, como lhe chamava Laplace) é autor de contribuições importantes em todas as áreas da Matemática e da Física-Matemática do seu tempo. Entre as descobertas matemáticas de Euler contam-se: (1) a soma (infinita) dos inversos dos quadrados dos números naturais é $\frac{\pi^2}{6}$; (2) dado um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, $V - A + F = 2$. Também é famosa a relação de Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, que engloba as cinco mais importantes constantes matemáticas: $0, 1, i, e$ e π . Euler é ainda o criador da teoria dos grafos, que teve origem no seu artigo sobre o problema das sete pontes de Königsberg. O problema consistia em passear pelas ruas da cidade prussiana de Königsberg (a atual cidade russa de Kaliningrado) passando cada ponte uma e uma só vez de maneira a terminar no ponto de partida. Euler provou que o problema não tem solução. Mais informações consulte <http://cmup.fc.up.pt/cmup/Euler/>

Nível 2

1. Uma vasilha V_1 contém uma mistura de 9 litros de vinho e 12 litros de água; outra vasilha V_2 contém uma mistura de 18 litros de vinho e 6 litros de água. Com o conteúdo das duas vasilhas queremos obter, em uma terceira vasilha inicialmente vazia, 18 litros de mistura com partes iguais de vinho e água. Nestas condições, quantos litros devem ser tomados da vasilha V_1 ?
2. Um octógono (polígono de oito lados) tem todos os seus ângulos internos iguais a 135° , e quatro de seus lados consecutivos medem respectivamente 6, 2, 8 e 5. Sabendo-se que os quatro lados seguintes medem respectivamente x , y , x e y (veja a figura abaixo), calcule o perímetro desse octógono.



3. Considere a seqüência numérica:

26,
 2006,
 202606,
 20200606,
 ⋮

cujo primeiro número é igual a 26 e onde são introduzidos, para os números seguintes, alternadamente dois zeros entre os algarismos 2 e 6 centrais, e 26 entre os dois algarismos zero centrais. Acima estão os quatro primeiros números

dessa seqüência.

Calcule a soma de todos os algarismos do 2006^o número da seqüência.

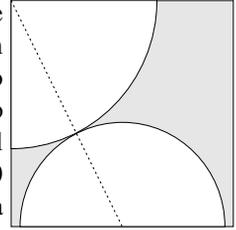
4. Se $n \geq 20$, provar que existem números inteiros a e b , maiores ou iguais a zero, tais que

$$3a + 11b = n.$$

5. Encontre todos os números palíndromos de cinco algarismos que são quadrados de números palíndromos. (Observação: um número é dito palíndromo quando lido da esquerda para direita e lido da direita para a esquerda resulta no mesmo número; por exemplo, 14741 é um número palíndromo de cinco algarismos, e 5335 é um palíndromo de quatro algarismos).

Nível 3

- Dois recipientes cilíndricos, A e B , de raios r_A e r_B , respectivamente, contêm água até a mesma altura. Se metade da água de A for passada para B , cria-se uma diferença de 10 cm entre os novos níveis em A e B . Além disso, se na situação inicial a metade da água de B for passada para A , a diferença entre os níveis passa a ser de 40 cm. Determine o quociente $\frac{r_A}{r_B}$.
- Em um quadrado de lado 40 cm são traçados dois arcos de circunferência: um deles, com centro no ponto médio de um dos lados desse quadrado; e o outro, com centro em um dos vértices do lado oposto àquele lado (veja figura ao lado). Sabendo-se que os dois arcos são tangentes, que o raio do arco de circunferência inferior é menor ou igual a 20 cm, e o arco superior tem raio menor ou igual a 40 cm, calcule as medidas desses raios de modo que a área sobreada seja máxima.



- Sejam m e n dois inteiros positivos tais que $m < n$. Prove que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n}$$

não pode ser um número inteiro. (Sugestão: Tente argumentar que esta soma é uma fração que, na forma irredutível, tem numerador ímpar e denominador par).

- Seja o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ satisfazendo a propriedade

$$P(x+1) - P(x) = x^2, \text{ para todo } x.$$

Calcule os coeficientes a , b e c .

Use a propriedade acima para calcular a soma

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2,$$

em função de n .

- Considere a seqüência numérica:

26,
2006,
202606,
20200606,
⋮

cujo primeiro número é igual a 26 e onde são introduzidos, para os números seguintes, alternadamente dois zeros entre os algarismos 2 e 6 centrais, e 26 entre os dois algarismos zero centrais. Acima estão os quatro primeiros números dessa seqüência.

Calcule a soma de todos os algarismos de todos os números, do primeiro até o n -ésimo número (o número que está na posição n) dessa seqüência, em função de n .

Gabarito Nível 1

1. Primeiramente vamos analisar o comportamento desta sequência.

O primeiro termo (26) tem oito como soma de seus algarismos. Agora, para formar o segundo termo (2006), acrescentamos dois zeros entre os algarismos 2 e 6, o que não altera a soma dos algarismos. Para formar o terceiro termo (202606), acrescentamos 26 entre os dois algarismos zero centrais, alterando, assim, a soma dos algarismos para 16. Ou seja, os termos de ordem par têm a mesma soma de algarismos dos termos de ordem ímpar que os precedem. Veja a tabela:

| | TERMOS | SOMA DOS ALGARISMOS |
|-------------|------------|---------------------|
| 1º termo | 26 | 8 |
| 2º termo | 2006 | 8 |
| 3º termo | 202606 | 2×8 |
| 4º termo | 20200606 | 2×8 |
| 5º termo | 2020260606 | 3×8 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2006º termo | ... | 1003×8 |

Assim, a soma dos algarismos do 2006º termo é $1003 \times 8 = 8024$.

2. A primeira peça tem 2 blocos em U mais um retângulo.

Total: $3 = 3 \times 1$ blocos.

A segunda peça tem 2 blocos em U mais 4 retângulos.

Total: $6 = 3 \times 2$ blocos.

A terceira peça tem 2 blocos em U mais 7 retângulos.

Total: $9 = 3 \times 3$ blocos.

A peça k terá $3k$ blocos, dos quais 2 são em U .

A 1000ª peça terá $3 \times 1000 = 3000$ blocos, dos quais 2 são em U . Portanto, $3000 - 2 = 2998$ blocos são retangulares.

3. Um número palíndromo de cinco algarismos é da forma: $a b c b a$

Para os pares: a é 2, 4, 6 ou 8.

Para os divisíveis por 3: $2a + 2b + c$ é múltiplo de 3.

$2a + 2b + c$ é um palíndromo.

A soma dos algarismos é um palíndromo de 2 algarismos, então devemos ter 11, 22, 33 ou 44, pois o valor máximo desta soma é $9 \times 5 = 45$.

Além disso, a soma deve ser múltiplo de 3, ou seja

$$2a + 2b + c = 33.$$

Para $a = 2$; 2 - - - 2

$2 \times 2 + 2b + c = 33$, então $2b + c = 29$, o que não pode ocorrer já que a soma máxima possível é 27, ou seja, 3×9 . Portanto, não temos números palíndromos com $a = 2$.

Para $a = 4$; 4 - - - 4

$2 \times 4 + 2b + c = 33$, então $2b + c = 25$. Assim, $b = 9$ e $c = 7$ ou $b = 8$ e $c = 9$. Temos então dois números palíndromos: 49794 e 48984.

Para $a = 6$; 6 - - - 6

$2 \times 6 + 2b + c = 33$, então $2b + c = 21$. Assim, $b = 9$ e $c = 3$, $b = 8$ e $c = 5$, $b = 7$ e $c = 7$ ou $b = 6$ e $c = 9$. Temos então quatro números palíndromos: 693936, 68586, 67776 e 66966.

Para $a = 8$; 8 - - - 8

$2 \times 8 + 2b + c = 33$, então $2b + c = 17$. Assim, $b = 8$ e $c = 1$, $b = 7$ e $c = 3$, $b = 6$ e $c = 5$, $b = 5$ e $c = 7$ ou $b = 4$ e $c = 9$.

Temos então cinco números palíndromos: 88188, 87378, 86568, 85758 e 84948.

Se a soma dos algarismos for um número de um algarismo (que é palíndromo!), então tal soma deverá ser 3, 6 ou 9 (para que o número seja divisível por 3).

Mas a soma dos algarismos deve ser maior ou igual 4 (pois a é, no mínimo, igual a 2). Então a soma deverá ser 6 ou 9.

Se a soma for 6 então a só poderá ser 2; 2 - - - 2

$2 \times 2 + 2b + c = 6$, então $2b + c = 2$. Assim, $b = 0$ e $c = 2$ ou $b = 1$ e $c = 0$.

Temos então dois números palíndromos: 20202 e 21012.

Se a soma for 9, então a poderá ser 2 ou 4:

Para $a = 2$; 2 - - - 2

$2 \times 2 + 2b + c = 9$, então $2b + c = 5$. Assim, $b = 0$ e $c = 5$, $b = 1$ e $c = 3$ ou $b = 2$ e $c = 1$.

Temos então três números palíndromos: 20502, 21312 e 22122.

Para $a = 4$; 4 - - - 4

$2 \times 4 + 2b + c = 9$, então $2b + c = 1$.

Assim, $b = 0$ e $c = 1$. Temos então um número palíndromo: 40104.

Então, os números palíndromos são: 49794, 48984, 693936, 68586, 67776, 66966, 88188, 87378, 86568, 85758, 84948, 20202, 21012, 20502, 21312, 22122 e 40104.

4. Como Chatum diz que comeu um camundongo branco ontem, então hoje deve ser segunda, quarta, sexta-feira ou domingo.

Como Chadê diz que comeu um camundongo preto ontem, então hoje deve ser quarta, sexta-feira ou domingo.

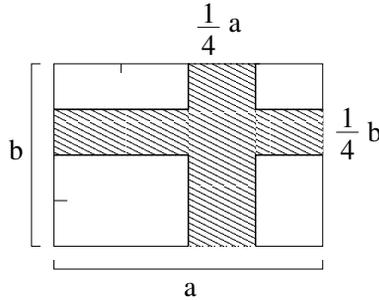
Como Chatruá diz que não comeu um camundongo branco ontem, então hoje deve ser terça, sexta-feira ou domingo.

Observando a tabela:

| Gatos | S | T | Q | Q | S | S | D |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| Chatun | x | | x | | x | | x |
| Chadê | | | x | | x | | x |
| Chatruá | | x | | | | x | x |

Portanto, hoje é domingo.

5. Sabemos que a bandeira tem formato retangular, que seus lados foram divididos em quatro partes iguais e que foram traçadas duas faixas, conforme a figura:



1ª Solução:

Assim, a área do retângulo é: $a \times b$.

E, portanto a área da cruz será:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}ba - \frac{1}{4}a \times \frac{1}{4}b = \\ & = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{8}{16}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{7}{16}ab. \end{aligned}$$

Então, a razão entre a área da cruz e a área do retângulo é:

$$\frac{\text{Área da Cruz}}{\text{Área do Retângulo}} = \frac{\frac{7}{16}ab}{ab} = \frac{7}{16}.$$

2ª Solução:

No retângulo há 16 retângulos menores de lados $\frac{1}{4}a$ e $\frac{1}{4}b$. Destes, 9 não fazem parte da cruz (parte branca) e 7 fazem parte da cruz. Portanto, a razão é $\frac{7}{16}$.

Gabarito Nível 2

1. Na vasilha V_1 encontramos 21 litros da mistura vinho-água (9 litros de vinho e 12 litros de água). A proporção vinho/água nesta vasilha é 9:12. Assim, se tomarmos x litros da vasilha V_1 teremos $\frac{9}{21}x = \frac{3}{7}x$ litros de vinho e $\frac{12}{21}x = \frac{4}{7}x$ litros de água.

Na vasilha V_2 encontramos 24 litros da mistura vinho-água (18 litros de vinho e 6 de água) na proporção 18:6. Assim, se tomarmos y litros da vasilha V_2 teremos $\frac{18}{24}y = \frac{3}{4}y$ litros de vinho e $\frac{6}{24}y = \frac{1}{4}y$ litros de água.

Queremos formar uma nova mistura, de volumes x e y das vasilhas V_1 e V_2 respectivamente, com volume 18 litros, então,

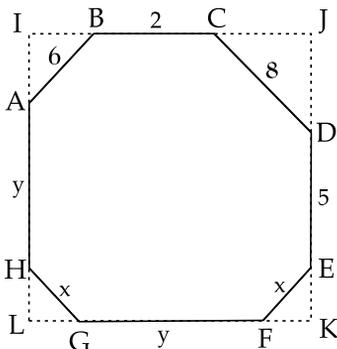
$$x + y = 18 \quad (1)$$

Nessa mistura, a proporção vinho e água é 1:1, ou seja,

$$\frac{3}{7}x + \frac{3}{4}y = \frac{4}{7}x + \frac{1}{4}y \quad \text{ou} \quad y = \frac{2}{7}x \quad (2)$$

De (1) e (2) obtemos: $x + \frac{2}{7}x = 18$, portanto, $x = 14$ litros.

2. O octógono está inscrito em um retângulo cujos lados opostos contêm os lados de medida 5 e de medida y (oposto ao de medida 5) do octógono, e os lados de medida 2 e y (oposto ao de medida 2) do octógono (veja a figura abaixo):



Isto porque os ângulos $\angle BAI$, $\angle ABI$, $\angle CDJ$ e $\angle DCJ$ medem 45° e, portanto, $\hat{I} = \hat{J} = 90^\circ$.

Então,

$$IJ = IB + BC + CJ = \frac{6\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{8\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2} = 2 + 7\sqrt{2}$$

(os lados \overline{IB} e \overline{CJ} são calculados usando-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos $\triangle ABI$ e $\triangle DCJ$).

Além disso,

$$LK = LG + GF + FK = \frac{x\sqrt{2}}{2} + y + \frac{x\sqrt{2}}{2} = y + x\sqrt{2}.$$

Como $LK = IJ$, temos:

$$y + x\sqrt{2} = 2 + 7\sqrt{2}$$

Por outro lado,

$$IL = IA + AH + HL = \frac{6\sqrt{2}}{2} + y + \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

e,

$$JK = JD + DE + EK = \frac{6\sqrt{2}}{2} + y + \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Como $IL = JK$, temos:

$$3\sqrt{2} + y + \frac{x\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} + 5 + \frac{x\sqrt{2}}{2}, \text{ ou}$$

$$y = 5 + \sqrt{2} \tag{3}$$

Substituindo-se o valor de y em (3) na equação $y + x\sqrt{2} = 2 + 7\sqrt{2}$ obtemos

$$\sqrt{2} = 2 + 7\sqrt{2} - y = 2 + 7\sqrt{2} - 5 - \sqrt{2} = -3 + 6\sqrt{2}, \quad \text{ou}$$

$$2x = -3\sqrt{2} + 12, \quad \text{ou} \quad x = 6 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

Assim, de (3) e (4) temos o perímetro do octógono:

$$2p = 6 + 2 + 8 + 5 + 2x + 2y = 21 + 12 - 3\sqrt{2} + 10 + 2\sqrt{2} = 43 - \sqrt{2}$$

3. No primeiro número da seqüência, o 26, a soma dos algarismos é:

$$2 \times 1 + 6 \times 1 = 8$$

A mesma soma ocorre no segundo número, o 2006.

Já no terceiro e no quarto número da seqüência a soma é:

$$2 \times 2 + 6 \times 2 = 16 = 8 \times 2$$

De uma maneira geral, a soma dos algarismos dos números de ordem $2k - 1$ e $2k$ (ímpares e pares consecutivos) é

$$2 \times k + 6 \times k = 8k$$

Por exemplo, para o número de ordem 7° , ou seja $2 \times 4 - 1$, portanto $k = 1$, temos a soma dos seus algarismo igual a $8 \times 4 = 32$

Assim, no 2006° , que é de ordem $2k$, a soma será:

$$8 \times \frac{2006}{2} = 8 \times 1003 = 8024.$$

4. Observe a equação $3a + 11b = n$, para:

$n = 20$ a equação é: $3a + 11b = 20$, que tem uma solução, $a = 3$ e $b = 1$.

$n = 21$ a equação é: $3a + 11b = 21$, com solução $a = 7$ e $b = 0$.

$n = 22$ a equação é: $3a + 11b = 22$, com solução $a = 0$ e $b = 2$.

Usaremos agora o seguinte resultado: se a , b e c são três números inteiros consecutivos, então um deles é múltiplo de 3. Se isto não fosse verdadeiro a diferença entre o menor múltiplo de 3 maior do que $c = a + 2$ e o maior múltiplo de 3

menor do que a (portanto entre dois múltiplos consecutivos de 3) seria maior do que 3, o que é absurdo.

Então, se $n > 22$, $n - 22$, $n - 21$ e $n - 20$ são três inteiros consecutivos positivos. Portanto, um deles será múltiplo de 3, ou seja, da forma $3k$. Assim, se $n > 22$, n será da forma $n = 20 + 3k$, ou $n = 21 + 3k$ ou $n = 22 + 3k$.

Se $n = 20 + 3k$, $a = 3 + k$ e $b = 1$ serão soluções maiores ou iguais a zero da equação.

Se $n = 21 + 3k$, $a = 7 + k$ e $b = 0$ serão soluções maiores ou iguais a zero da equação.

Se $n = 22 + 3k$, $a = k$ e $b = 2$ serão soluções maiores ou iguais a zero da equação.

Logo, existem números inteiros a e b tais que $3a + 11b = n$ para $n \geq 20$.

5. Observemos inicialmente que um número de cinco algarismos só poderá ser quadrado de um número de três algarismos, pois $(99)^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$, que não tem cinco algarismos, e $(1000)^2 = 1000000$ tem mais de cinco algarismos.

Consideremos então o quadrado de um número palíndromo de três algarismos aba , onde a e b são algarismos e $a \neq 0$. Então:

$$n = (aba)^2 = (100a + 10b + a)^2 = 10000a^2 + 100b^2 + a^2 + 2000ab + 200a^2 + 20ab = 10201a^2 + 100b^2 + 2020ab.$$

Observe agora que a só poderá ser 1, 2 ou 3, pois $(400)^2 = 160000$ já tem seis algarismos. Então:

$$\text{Se } a = 1: \quad n = 10201 + 100b^2 + 2020b$$

$$b = 0 \Rightarrow n = 10201 = (101)^2$$

$$b = 1 \Rightarrow n = 10201 + 100 + 2020 = 12321 = (111)^2$$

$$b = 2 \Rightarrow n = 10201 + 400 + 4040 = 14641 = (121)^2$$

$$b = 3 \Rightarrow n = 10201 + 900 + 6060 = 17161 \quad (\text{não é palíndromo})$$

$$b = 4 \Rightarrow n = 10201 + 1600 + 8080 = 19881 \quad (\text{não é palíndromo})$$

Se $b \geq 5$ então n terá 1 na casa da unidade e um algarismo maior do que 1 na dezena de milhar, e portanto n não será palíndromo.

$$\text{Se } a = 2: \quad n = 40804 + 100b^2 + 4040b$$

$$b = 0 \Rightarrow n = 40804 = (202)^2$$

$$b = 1 \Rightarrow n = 40804 + 100 + 4040 = 44944 = (212)^2$$

$$b = 2 \Rightarrow n = 40804 + 400 + 8080 = 49284 \quad (\text{não é palíndromo}).$$

Se $b \geq 3$ então n terá 4 na casa da unidade e um algarismo maior do que 4 na dezena de milhar.

$$\text{Se } a = 3: \quad n = 91809 + 100b^2 + 6060b$$

$$b = 0 \Rightarrow n = 91809 \quad (\text{não é palíndromo})$$

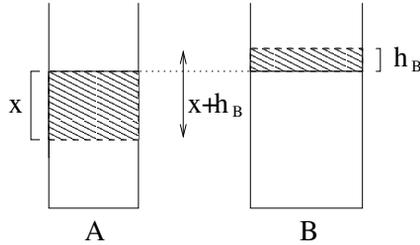
$$b = 1 \Rightarrow n = 91809 + 100 + 6060 = 97969 \quad (\text{não é palíndromo}).$$

Se $b \geq 2$, n terá mais do que cinco algarismos.

Portanto os números são: 10201, 12321, 14641, 40804, 44944.

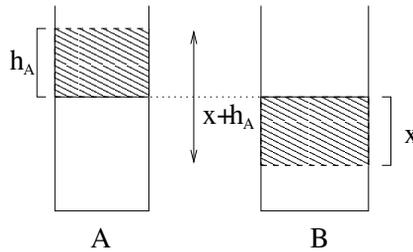
Gabarito Nível 3

1. Sejam: r_A o raio do recipiente A, r_B o raio do recipiente B, x a metade da altura dos recipientes A e B, h_A a altura assumida pelo líquido passado do recipiente B no recipiente A e h_B a altura assumida pelo líquido passado do recipiente A no recipiente B. Assim,



$$\begin{cases} \pi r_A^2 x = \pi r_B^2 h_B \\ x + h_B = 10 \Rightarrow h_B = 10 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_A^2 x = r_B^2 (10 - x) \Rightarrow x(r_A^2 + r_B^2) = 10r_B^2. \quad (1)$$



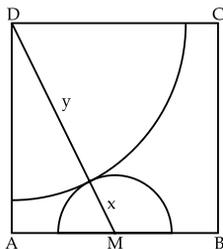
$$\begin{cases} \pi r_B^2 x = \pi r_A^2 h_A \\ x + h_A = 40 \Rightarrow h_A = 40 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_B^2 x = r_A^2 (40 - x) \Rightarrow x(r_A^2 + r_B^2) = 40r_A^2. \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1):

$$4 \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{1}{2}.$$

2.



Sejam x e y os raios do semi-círculo inferior e do quarto de círculo superior, respectivamente. Então $x + y = DM$.

Mas, $AD^2 + AM^2 = DM^2$, ou

$$40^2 + 20^2 = DM^2, \text{ ou}$$

$$DM^2 = 1600 + 400 = 2000$$

$$DM = \sqrt{2000} = \sqrt{400 \times 5} = 20\sqrt{5}.$$

Assim, $x + y = 20\sqrt{5}$. (1)

Agora, a soma das áreas do semi-círculo e do quarto de círculo é:

$$S = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{4}. \quad (2)$$

Queremos achar x e y de modo que S seja *mínima* (pois a área hachurada deve ser *máxima*). Então, de (1) temos $y = 20\sqrt{5} - x$. Levando em (2) obtemos:

$$\begin{aligned} S = S(x) &= \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(20\sqrt{5} - x)^2}{4} \right] = \frac{\pi}{2} \left[x^2 + \frac{2000 + x^2 - 40\sqrt{5}x}{2} \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{3x^2 - 40\sqrt{5}x + 2000}{2} \right]. \end{aligned}$$

S será *mínima* quando o polinômio $p(x) = 5x^2 - 40\sqrt{5}x + 2000$ for *mínimo*. Isto ocorre no vértice da parábola que pode ser encontrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 40\sqrt{5}x + 2000 &= 3 \left[x^2 - \frac{40\sqrt{5}}{3}x + \frac{2000}{3} \right] = \\ &= 3 \left[\left(x - \frac{20\sqrt{5}}{3} \right)^2 - \frac{2000}{9} + \frac{2000}{3} \right] = 3 \left[\left(x - \frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{4000}{9} \right) \right] \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{4000}{2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = \frac{20\sqrt{5}}{3}$.

$$\text{Então } y = 20\sqrt{5} - \frac{20\sqrt{5}}{3} = \frac{40\sqrt{5}}{3}.$$

A resposta é: $x = \frac{20\sqrt{5}}{3}m$ e $y = \frac{40\sqrt{5}}{3}m$ (Observe que $y = 2x$).

3. Como $m < n$, pelo menos um dos inteiros entre m e n (incluindo m e n) é par. Escrevendo cada número inteiro de m até n na sua decomposição em fatores primos, existirá pelo menos um número cujo expoente de 2 é o maior possível (um número par, é claro).

Afirmamos que existe um único número de m até n com expoente máximo da potência de 2 em sua decomposição em fatores primos. Suponhamos que isso não ocorra, ou seja, suponhamos que existam inteiros k e l , com $0 \leq k < l$, tais que $m + l \leq n$, $m + k = a \times 2^x$, $m + l = b \times 2^x$ e x expoente máximo (inteiro positivo) de 2.

Então, como a e b são ímpares e $a < b$, existirá um número par c , tal que $a < c < b$. Seja $c = 2^y \times d$. Logo $c \times 2^x = d \times 2^{x+y}$ será um número entre m e n com expoente da potência de 2 maior do que o expoente em $m + l$ ou $m + k$, o que é uma contradição.

Seja então $p \times 2^z = m + r$, $m \leq p \times 2^z \leq n$, o número com maior expoente (z) da potência de 2. Então o mínimo múltiplo comum de $m, m + 1, \dots, n$ será da forma $2^z \times q$, onde q é ímpar.

Então os números da forma $\frac{2^z \times q}{m + j}$, $0 \leq j \leq n - m$, serão pares, exceto o número $\frac{2^z \times q}{m + r}$. Segue-se que:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{\frac{2^z \times q}{m} + \frac{2^z \times q}{m+1} + \dots + \frac{2^z \times q}{m+r} + \dots + \frac{2^z \times q}{n}}{2^z \times q}.$$

Mas então o numerador dessa fração é ímpar e o denominador será par. Logo, a soma não é um número inteiro.

4. Como $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, então:

$$\begin{aligned} P(x+1) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) = \\ &= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x+1) = \\ &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c) - \\ &\quad - ax^3 - bx^2 - cx = \\ &= 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $P(x+1) - P(x) = x^2$, então:

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a+2b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{3}{2}a \\ c = -(a+b) \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -(a+b) \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{2-3}{6}\right) = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Portanto, $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

Agora, temos para $m \in \mathbb{N}$, em particular, que $m^2 = P(m+1) - P(m)$, de modo que:

$$n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= P(n+1) - P(n) + P(n) - P(n-1) + \dots + P(3) - P(2) + P(2) - \\
&\quad - P(1) = \\
&= P(n+1) - P(1) = \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \\
&= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{6}(n+1) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \\
&= \frac{n^3}{3} + n^2 + n - \frac{n^2}{2} - n + \frac{n}{6} = \\
&= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.
\end{aligned}$$

Por exemplo, tome $n = 5$:

$$\begin{aligned}
&1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55, \text{ e} \\
&\frac{2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 5}{6} = \frac{2 \times 125 + 3 \times 25}{6} = \frac{250 + 75 + 5}{6} = \frac{330}{6} = 55,
\end{aligned}$$

como esperado.

5. Sejam S_1, S_2, \dots, S_n as somas dos algarismos do primeiro, do segundo, \dots , do n -ésimo termo da seqüência, respectivamente. Então:

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_2 & 1 \times (2 + 6) &= 8 \\
S_3 &= S_4 & 2 \times 8 &= 16 \\
S_5 &= S_6 & 3 \times 8 &= 24 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se n for par então $S_{n-1} = S_n = \frac{n}{2} \times 8$.

Se n for ímpar então $S_n = \frac{n+1}{2} \times 8$.

Assim, se n for par, a soma pedida S será:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + \dots + S_n = 2 \times \left(8 + 16 + \dots + \frac{n}{2} \times 8 \right) = 2 \times 8 \left(1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} \right) = \\ &= 16 \times \frac{\left(1 + \frac{n}{2} \right) \frac{n}{2}}{2} = 4n \left(1 + \frac{n}{2} \right) = 2n(n + 2). \end{aligned}$$

Se n for ímpar, então a soma S será:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} + S_n = 2 \times 8 \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} \right) + \frac{n+1}{2} \times 8 = \\ &= 16 \times \frac{\left(1 + \frac{n-1}{2} \right) \frac{n-1}{2}}{2} + 4(n+1) = 4(n-1) \left(1 + \frac{n-1}{2} \right) + 4(n+1) = \\ &= 2(n-1)(n+1) + 4(n+1) = 2(n+1)(3n+1). \end{aligned}$$

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por medalha)

Nível 1

Ouro

- Daniela Weingärtner (Escola Barão do Rio Branco)

Prata

- Aline Nass Fortini de Oliveira (Colégio Barddal)
- Caio Fraga Luz (Colégio Catarinense)
- Eduardo Stühler Neves (E. M. Presidente Castello Branco)
- Julia Hoffmann Buratto (Colégio Catarinense)
- Julyan Figueredo Martins (Centro Educacional SATC)
- Matheus Henrique Stofela Sarolli (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Miguel Bauschat (Escola Barão do Rio Branco)
- Miryan Yumi Sakamoto (Colégio da Lagoa)
- Nathalia Pereira (Colégio de Aplicação UNIVALI)
- Tiago Luiz Tambosi (Colégio Catarinense)

Bronze

- Adriana Cristina de Vasconcellos e Silva (Educandário “Imaculada Conceição”)
- Bernardo Peressoni Vieira (Colégio Catarinense)
- Bruno Toshi Agava (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Felipe Gonçalves de Oliveira (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Iana Mabel De Marco Fazzioni (Colégio Barddal)

- José Gustavo Zanis Dias de Oliveira (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Lucas Madeira (Colégio Salesiano Itajaí)
- Pedro Lufiego da Luz (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Renan Marcelo Conte (CEFRAI - Centro Educacional Fraiburgo Ltda)
- Rogério Schiefler Kleis (E. E. B. Professor Mario de Oliveira Goeldner)

Menção Honrosa

- Alessandra Elisa Thomsen (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Bruno Silveira Ferrari (Centro Educacional Menino Jesus)
- Bruno Staffen (E. E. B. Orestes Guimarães)
- Caio Henrique Amaro (Colégio Tupy - SOCIESC)
- Cristiano Melillo Bittencourt (Colégio Catarinense)
- Daniel Paulo Silveira (Colégio Alpha Objetivo)
- Elisa Cordeiro Nauck (Centro Educacional Menino Jesus)
- Emmanuel Schlickmann (Colégio Santo Antônio)
- Enrico de Fransceschi Hoefel (Escola Sarapiquí)
- Evair da Silva Borges (E. B. Prof. Neri Brasileiro Martins)
- Gabriel Cara Soares (Colégio Tupy - SOCIESC)
- Julia Vivanco Bercovich (Colégio da Lagoa)
- Lucas Rodrigues de Souza (Colégio Santo Antônio)
- Mariana Ferrari Passeggio (Colégio Cenecista José Elias Moreira)
- Matheus Pegoraro de Souza (Liceu Catarinense de Ensino)
- Níkolás Schmidt Zonta (E. M. Professora Anna Maria Harger)

- Osni de Borba Cidral Júnior (E. E. B. Felipe Schmidt)
- Rafael Tormena (Colégio Santo Antônio)
- Taísa Gruber (Colégio Global)
- Thais Caroline Fernandes (E. M. Professora Anna Maria Harger)
- Thayller Barp (Colégio Cinecista Padre Anchieta)
- Thiago Brigoni (Colégio Salesiano Itajaí)

Nível 2

Ouro

- Gustavo Lisbôa Empinotti (Escola Dinâmica)
- Renan Henrique Finder (Colégio dos Santos Anjos)

Prata

- Bárbara Louize da Silva (Colégio Madre Francisca Lampel)
- Carlos Filipe Klahold (Colégio dos Santos Anjos)
- Guilherme Trevisan Locatelli (Escola Dinâmica)
- Leonardo Gonçalves Fischer (CEFRAI - Centro Educacional Fraiburgo Ltda)
- Marcei Fernandes da Rosa Pereira (Colégio dos Santos Anjos)
- Vinícius Rios Fuck (Colégio Elisa Andreoli)
- Vitor Costa Fabris (Colégio São Bento)
- Yuri da Silva Villas Boas (Colégio Catarinense)

Bronze

- André Mateus Netto Spillere (Colégio São Bento)
- Camille Fiamoncini Mattos (Educandário Imaculada Conceição)

- Eduardo Santos da Silveira (Colégio São Bento)
- Giseli Antonia Mafra Priprá (E. M. E. F. Max Schubert)
- Guido Quint Tonelli Santos (Educandário Imaculada Conceição)
- Gustavo Dela Bruna Noronha (Colégio Criativo)
- Igor Piacentini Coelho da Costa (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Luis Gustavo Longen (Colégio Sinodal Ruy Barbosa)
- Natsue Eccel Mizubuti (Colégio Santo Antônio)
- Rafael Ricardo Bona (E. M. Erwin Prade)
- Sérgio Feldemann de Quadros (Colégio Salesiano Itajaí)
- Tiago Nunes Resmini (Colégio São Bento)

Menção Honrosa

- Alexandre Elvis de Souza (E. M. Erwin Prade)
- Carolina de Paula Peters (Colégio Salesiano Itajaí)
- Djony Wesley Barp (Colégio Cenecista Padre Anchieta)
- Gabriela Letícia Melo de Souza (Kumon Centro - Florianópolis)
- Giulia Aikawa da Silveira Andrade (Escola Sarapiquá)
- Guilherme Vitor Wendhausen Rothbarth (Colégio Tupy - SOCIESC)
- Igor Hinnig Wolniewicz (Centro Educacional Menino Jesus)
- Ingrid Knochenhauer (Educandário Imaculada Conceição)
- Jonathan Lopes Florêncio (E. M. Pastor Hans Müller)
- Luiz Gustavo Cordeiro (Colégio Catarinense)
- Mayara Laís Maier (E. M. E. F. Guilherme Hanemann)
- Natan Cardozo Leal (E. E. B. Orestes Guimarães)

Nível 3**Ouro**

- Bruno Dirksen Orlandi (Colégio Dehon)

Prata

- Jaqueline Kleine Buckstegge (E. E. B. Professor Mario de Oliveira Goeldner)
- Olav Philipp Henschel (Colégio Tupy - SOCIESC)

Bronze

- Haifang Nehls (Colégio Tupy - SOCIESC)
- Lucas Bruno Barbosa Sandoval (Colégio de Aplicação da UFSC)

Menção Honrosa

- Camila Silva Escobar (E. E. B. Professor Mario de Oliveira Goeldner)
- Danilo Nunes do Carmo (Colégio de Aplicação da UFSC)
- Fabrício Meurer de Albuquerque (Colégio Catarinense)
- Marcélio Adriano Nunes Filho (Colégio Cenecista São José)
- Petrius Paulo Tambosi (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Ricardo Luis Brugnago (Colégio Tupy - SOCIESC)
- Ruan Ricardo Rengel (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Thomas Eduardt Hafemann (Conjunto Educacional Dr. Blumenau)
- Tiago Madeira (Colégio Salesiano Itajaí)

Escolas Participantes

Associação de Ensino Santo Estêvão (Ituporanga); Associação de Pais e Amigos dos Excepcionais (Videira); Centro de Educação do Município de Mafra (Mafra); Centro Educacional Ariribá (Balneário Camboriú); Centro Educacional Atlas (Palhoça); Centro Educacional Canguru (Jaraguá do Sul); Centro Educacional Companhia do Saber (São José); Centro Educacional Canguru (Jaraguá do Sul); Centro Educacional Companhia do Saber (São José); Centro Educacional Energia (Criciúma); Centro Educacional Escola do Mar (São José); Centro Educacional Fraiburgo Ltda (Fraiburgo); Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); Centro Educacional Municipal Interativo (São José); Centro Educacional Municipal Professora Maria Iracema Martins de Andrade (São José); Centro Educacional Nossa Senhora dos Prazeres (Lages); Centro Educacional Pedro dos Santos (Rio do Sul); Centro Educacional Professor Cacildo Romagnani (Itajaí); Centro Educacional Professor Desembargador Francisco José Rodrigues de Oliveira (Joinville); Centro Educacional Professora Maria de Lourdes Couto Cabral (Navegantes); Centro Educacional Roberto Machado (Rio do Sul); Centro Educacional SATC (Criciúma); Centro Educacional Terezinha Krautz (Palhoça); Centro Educacional Timbó S/A (Timbó); Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (Florianópolis); Centro Integrado de Ensino Fundamental (Piçarras); Colégio Agrícola de Camboriú (Camboriú); Colégio Alpha Objetivo (São José); Colégio Antônio Peixoto (Florianópolis); Colégio Barddal (Palhoça); Colégio Blumenauense (Blumenau); Colégio Catarinense (Florianópolis); Colégio Cenecista Dr. Júlio César Ribeiro Neves (Concórdia); Colégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); Colégio Cenecista Nossa Senhora de Fátima (Taió); Colégio Cenecista Padre Anchieta (Capinzal); Colégio Cenecista Presidente Dutra (Faxinal dos Guedes); Colégio Cenecista São José (Rio Negrinho); Colégio Cooper Ápice (Balneário Camboriú); Colégio Coração de Jesus (Florianópolis); Colégio Cruz e Sousa (Florianópolis); Colégio Cruz e Sousa (Lages); Colégio da Lagoa (Florianópolis); Colégio da Univille (Joinville); Colégio de Aplicação da UFSC (Flo-

rianópolis); Colégio de Aplicação UNIVALI (Itajaí); Colégio de Ensino Médio Univille (São Bento do Sul); Colégio Dehon (Tubarão); Colégio Dom Bosco (Rio do Sul); Colégio Dom Jaime Câmara (São José); Colégio dos Santos Anjos (Joinville); Colégio Elisa Andreoli (São José); Colégio Energia (Brusque); Colégio Energia (Pailhoça); Colégio Evangélico Jaraguá (Jaraguá do Sul); Colégio Exponencial (Chapecó); Colégio Extensão (Sombrio); Colégio Global (São Bento do Sul); Colégio Hamônia (Ibirama); Colégio Henry Ford Ltda. (Timbó); Colégio Internacional (Blumenau); Colégio Madre Francisca Lampel (Gaspar); Colégio Marista (Criciúma); Colégio Nossa Senhora de Fátima (Florianópolis); Colégio Radical (Itajaí); Colégio Sagrada Família (Blumenau); Colégio Salesiano Itajaí (Itajaí); Colégio Santíssima Trindade (Joaçaba); Colégio Santo Antônio (Joinville); Colégio São Bento (Criciúma); Colégio São José (Itajaí); Colégio São José (São Miguel do Oeste); Colégio Universitário (Gaspar); Colégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul); Colégio Stella Maris (Laguna); Colégio Superação (Videira); Colégio Tradição (Florianópolis); Colégio Tupy (São Bento do Sul); Colégio Tupy - SOCIESC (Joinville); Colégio Visão (São José); Conjunto Educacional "Dr. Blumenau" (Pomerode); Cooperativa Educacional de Imbituba (Imbituba); Cooperativa Educacional Magna (Concórdia); Curso e Colégio Energia Itajaí (Itajaí); E. B. Antônio Ramos (Itajaí); E. B. Brigadeiro Eduardo Gomes (Florianópolis); E. B. Dráusio Celestino Cunha (Major Vieira); E. B. Gaspar da Costa Moraes (Itajaí); E. B. José Fernandes Potter (Itajaí); E. B. M. Água Amarela (Chapecó); E. B. M. Álvaro Tancredo Dippold (São Francisco do Sul); E. B. M. Anna Zamarchi Coldebella (Concórdia); E. B. M. Basélisse Carvalho R. Virmond (São Bento do Sul); E. B. M. Bento Elói Garcia (Itapema); E. B. M. Dalmir Pedro Cubas (São Bento do Sul); E. B. M. Donícia Maria da Costa (Florianópolis); E. B. M. Dr. Amadeu da Luz (Pomerode); E. B. M. Elizabetha Andrezza Pavan (Concórdia); E. B. M. João Dias (São Francisco do Sul); E. B. M. Joaquim Vicente de Oliveira (Itapema); E. B. M. Juscelino Kubitschek de Oliveira (São Miguel do Oeste); E. B. M. Luiz Cândido da Luz (Florianópolis); E. B. M. Marechal Arthur da Costa e Silva (São

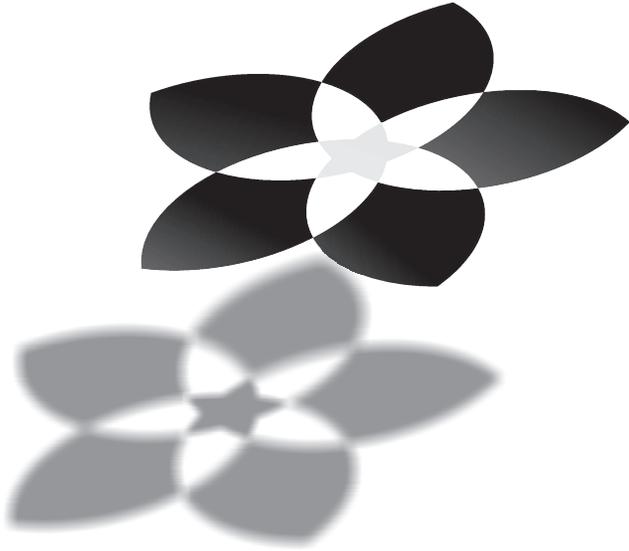
Miguel do Oeste); E. B. M. Melvin Jones (Concórdia); E. B. M. Professor Antônio Rohden (Braço do Norte); E. B. M. Professor Donato Alipio de Campos (Biguaçu); E. B. M. Professor Manoel Roldão das Neves (Biguaçu); E. B. M. Rio do Pinho (Canoinhas); E. B. M. Sophia Schwedler (São Bento do Sul); E. B. M. Vitor Miguel de Souza (Florianópolis); E. B. M. Waldemar Antônio VonDentz (São Miguel do Oeste); E. B. Mansueto Três (Itajaí); E. B. Melvin Jones (Itajaí); E. B. P. Martinho Gervási (Itajaí); E. B. Padre José de Anchieta (Itajaí); E. B. Professora Antonieta Silveira de Souza (Palhoça); E. B. Professora Neri Brasiliano Martins (Palhoça); E. E. B. Cecília Ax (Presidente Getúlio); E. E. B. Engenheiro Álvaro Catão (Imbituba); E. E. B. Professora Ursulina de Senna Castro (Palhoça); E. E. B. Anita Brasileira (Videira); E. E. B. Antonia Alpaides C. dos Santos (Joinville); E. E. B. Antônio Gonzaga (Porto União); E. E. B. Arabutã (Arabutã); E. E. B. Barão de Antonina (Mafra); E. E. B. Belermino Victor Dalla Vecchia (Ponte Serrada); E. E. B. Bertino Silva (Leoberto Leal); E. E. B. Bruno Hoeltgebaum (Blumenau); E. E. B. Carlos Techentin (Blumenau); E. E. B. Carmem Seara Leite (Garuva); E. E. B. Cecilia Bertha Hildegard Cardoso (Lontas); E. E. B. Cel Cid Gonzaga (Porto União); E. E. B. Colombo Machado Salles (Três Barras); E. E. B. Comendador Rocha (Laguna); E. E. B. Conselheiro Astrogildo Odon Aguiar (Barra Velha); E. E. B. Conselheiro Mafra (Joinville); E. E. B. Coronel Antônio Lehmkuhl (Águas Mornas); E. E. B. Coronel Lara Ribas (Chapecó); E. E. B. Cristo Rei (São João do Oeste); E. E. B. David Pedro Espíndola (Barra Velha); E. E. B. Daysi Werner Salles (Florianópolis); E. E. B. de Lages (Lages); E. E. B. Deputado Abel Avila dos Santos (Ascurra); E. E. B. Dom Joaquim (Braço do Norte); E. E. B. Domingos Sávio (Ascurra); E. E. B. Dr. Frederico Rolla (Atalanta); E. E. B. Dr. Hermann Blumenau (Trombudo Central); E. E. B. Eliseu Guilherme (Ibirama); E. E. B. Engenheiro Annes Gualberto (Braço do Norte); E. E. B. Felipe Schmidt (São Francisco do Sul); E. E. B. Frei Evaristo (Iomerê); E. E. B. Frei Godofredo (Gaspar); E. E. B. Fridolino Hulse (São Martinho); E. E. B. Gen Osvaldo Pinto da Veiga (Cavivari de Baixo); E. E. B. Gertrud Aichinger (Ibirama); E. E. B. Giovanni Pasqualini

Faraco (Joinville); E. E. B. Gonçalves Dias (Fraiburgo); E. E. B. Governador Ivo Silveira (Palhoça); E. E. B. Henrique Rupp Junior (Campos Novos); E. E. B. Heriberto Hulse (Ibiam); E. E. B. Hermes Fontes (Petrolândia); E. E. B. Holando Marcellino Gonçalves (Jaraguá do Sul); E. E. B. Humberto Herms Hoffmann (Nova Veneza); E. E. B. Ignácio Stakowski (Içara); E. E. B. Inspetor Eurico Rauhen (Videira); E. E. B. Irmã Irene (Santa Cecília); E. E. B. Irmã Maria Teresa (Palhoça); E. E. B. Irmão Joaquim (Ibicaré); E. E. B. Isabel da Silva Telles (Irani); E. E. B. Itajubá (Descanso); E. E. B. João Colin (Joinville); E. E. B. João Teixeira Nunes (Tubarão); E. E. B. João Tolentino Jr. (Presidente Nereu); E. E. B. Joaquim D'Agostini (Lacerdópolis); E. E. B. Jornalista Jairo Callado (Florianópolis); E. E. B. José Boiteux (Florianópolis); E. E. B. José Clemente Pereira (José Boiteux); E. E. B. Júlio Vicente de Pelegrin (Guaraciaba); E. E. B. Lindo Sardagna (Dona Emma); E. E. B. Lourdes Tonin (Planalto Alegre); E. E. B. Lúcia do Livramento Mayvorme (Florianópolis); E. E. B. Luiz Davet (Major Vieira); E. E. B. M. Aurora Péterle (Siderópolis); E. E. B. M. Nossa Senhora Aparecida (Xanxerê); E. E. B. Maestro Heitor Villa Lobos (Rio do Campo); E. E. B. Manoel Estêvão Furtado (Papanduva); E. E. B. Marcilio Dias S. Thiago (Imbituba); E. E. B. Marechal Eurico Gaspar Dutra (Curitibanos); E. E. B. Maria Salette Cazzamali (Santa Cecília); E. E. B. Miguel Couto (Schroeder); E. E. B. Monsenhor Bernardo Peters (Treze de Maio); E. E. B. Monteiro Lobato (Mafra); E. E. B. Nereu de Oliveira Ramos (Guaraciaba); E. E. B. Nereu Ramos (Itapoá); E. E. B. Nossa Senhora de Fátima (Palhoça); E. E. B. Nossa Senhora de Fátima (Rio Fortuna); E. E. B. Orestes Guimarães (São Bento do Sul); E. E. B. Orlando Bertoli (Presidente Getúlio); E. E. B. Otilia Muller (Chapadão do Lageado); E. E. B. Padre Antônio Vieira (Ipuacu); E. E. B. Papa João XXIII (Presidente Getúlio); E. E. B. Paulo Bauer (Itajaí); E. E. B. Prefeito Lauro Zimmermann (Guaramirim); E. E. B. Presidente Juscelino Kubitschek (São José); E. E. B. Presidente Médici (Joinville); E. E. B. Professor Aldo Câmara (Santa Rosa de Lima); E. E. B. Professor Gustavo Augusto Gonzaga (Joinville); E. E. B. Professor José Rodrigues Lopes (Garopaba); EE. E. B. Professor Mário de Oli-

veira Goeldner (Mafra); E. E. B. Professor Nicola Baptista (São Francisco do Sul); E. E. B. Professor Rudolfo Meyer (Joinville); E. E. B. Professor Zelindo Carbonera (Marema); E. E. B. Professora Adelina Regis (Videira); E. E. B. Professora Angélica Cabral (Tubarão); E. E. B. Professora Antônia Gasino de Freitas (Lajeado Grande); E. E. B. Professora Geni Comel (Chapecó); E. E. B. Professora Julieta Pavan Simões (Imbituba); E. E. B. Professora Luiza Santin (Chapecó); E. E. B. Professora Maura de Senna Pereira (Pinheiro Preto); E. E. B. Professora Otília Cruz (Florianópolis); E. E. B. Professora Valdete Inês Piazero Zindars (Jaraguá do Sul); E. E. B. Professora Zelia Scharf (Chapecó); E. E. B. Professora Dolores Luzia dos Santos Krauss (Gaspar); E. E. B. Protasio Joaquim da Cunha (Sombrio); E. E. B. Roberto Moritz (Ituporanga); E. E. B. Roland Harold Dornbusch (Jaraguá do Sul); E. E. B. Rosina Nardi (Seara); E. E. B. Ruth Lebarbechon (Água Doce); E. E. B. Ruy Barbosa (Timbó); E. E. B. Sagrado Coração de Jesus (Tubarão); E. E. B. Santa Cruz (Canoinhas); E. E. B. Santa Teresinha (Curitibanos); E. E. B. Santo Antônio (Itapiranga); E. E. B. São João Batista (Capivari de Baixo); E. E. B. São João Batista (Itaiópolis); E. E. B. São João Bosco (Apiúna); E. E. B. São José (Fraiburgo); E. E. B. São José (Navegantes); E. E. B. São Luiz (União do Oeste); E. E. B. São Miguel (São Miguel do Oeste); E. E. B. São Sebastião (São Miguel do Oeste); E. E. B. São Valentim (São Lourenço do Oeste); E. E. B. Semíarmis Bosco (Witmarsum); E. E. B. Senador Francisco Benjamin Gallotti (Tubarão); E. E. B. Serafina Fontana Bonet (Timbó Grande); E. E. B. Tancredo de Almeida Neves (Chapecó); E. E. B. Tenente Anselmo José Hess (Luiz Alves); E. E. B. Tereza Cristina (Laurentino); E. E. B. Urbano Salles (Frei Rogério); E. E. B. Verônica Senem (Galvão); E. E. B. Victor Meirelles (Vitor Meireles); E. E. B. Visconde de Cairu (Lages); E. E. B. Visconde do Rio Branco (Imbituba); E. E. B. Vitorio Roman (Vargem Bonita); E. E. B. Walmor Ribeiro (Ibirama); E. E. B. Walter Probst (Aurora); E. E. B. Werner Knabben (Braço do Norte); E. E. B. Willy Hering (Rio do Sul); E. E. F. Agilberto Zandavalli (Guatambu); E. E. F. Alberto Pretti (Brusque); E. E. F. Bernardo Muller (Presidente Getúlio); E. E. F. Deputado Walter

Vicente Gomes (Tijucas); E. E. F. Dom Jaime de Barros Câmara (Palhoça); E. E. F. Dom Pedro I (Vitor Meireles); E. E. F. Irene Reva Zadorosny (Papanduva); E. E. F. Luiz Delfino (Schroeder); E. E. F. Monsenhor Sebastião Scarzello (Joinville); E. E. F. Neusa Bernardina Lemos Marques (Itá); E. E. F. Padre Bernardo (Quilombo); E. E. F. Padre Hermenegildo Bortolato (Rio das Antas); E. E. F. Polidoro Santiago (Timbó); E. E. F. Professor Emir Ropelato (Timbó); E. E. F. Professor João Bonelli (José Boiteux); E. E. F. Professora Maria Angélica Calazans (Dona Emma); E. E. F. Rui Barbosa (Joinville); E. E. F. São Cristóvão (Criciúma); E. E. F. São João Batista (São Miguel do Oeste); E. E. F. Testo Central Alto (Pomerode); E. E. F. Venceslau Bueno (Palhoça); E. E. M. Deputado Nagib Zattar (Joinville); E. E. M. Dr. Ruben Roberto Schmidlin (Joinville); E. E. M. Professor Roberto Grant (São Bento do Sul); E. E. Médio Vitor Meirelles (Jaraguá do Sul); E. M. Anaburgo (Joinville); E. M. B. Jardim do Lago (Chapecó); E. M. Deputado Lauro Carneiro de Loyola (Joinville); E. M. Doutor Sadalla Amin Ghanem (Joinville); E. M. Dr. Abdon Baptista (Joinville); E. M. Dr. Vilson Pedro Kleinubing (Capinzal); E. M. E. B. Frei Bernardino (Lages); E. M. E. B. Professor Antônio Joaquim Henriques (Lages); E. M. E. B. Professor Eduardo Pedro Amaral (Lages); E. M. E. B. Professora Fausta Rath (Lages); E. M. E. B. Santa Helena (Lages); E. M. E. Básica Izidoro Marin (Lages); E. M. E. F. Albano Kanzler (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Anna Töwe Nagel (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Atayde Machado Dadi (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Educar (Itapema); E. M. E. F. Guilherme Hanemann (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Helmuth Guilherme Duwe (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Jonas Alves de Souza (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Maria Linhares de Souza (Itapema); E. M. E. F. Maria Nilda Salai Stähelin (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Max Schubert (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Professor Francisco Solamon (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Professora Gertrudes S. Milbratz (Jaraguá do Sul); E. M. E. F. Santo Antônio (Rodeio); E. M. E. F. São Lourenço (Mafra); E. M. E. F. Waldemar Schmitz (Jaraguá do Sul); E. M. Emilio Paulo Roberto Hardt (Joinville); E. M. Erwin Prade (Timbó); E. M. Governador Ivo Silveira (Balneário Camboriú);

E. M. Governador Pedro Ivo Campos (Joinville); E. M. João Costa (Joinville); E. M. João de Oliveira (Joinville); E. M. Luiz Francisco Vieira (Itapema); E. M. Maurício Germer (Timbó); E. M. Padre Martinho Stein (Timbó); E. M. Padre Pedro Baron (Itajaí); E. M. Pastor Hans Müller (Joinville); E. M. Pauline Parucker (Joinville); E. M. Presidente Castello Branco (Joinville); E. M. Presidente Médici (Balneário Camboriú); E. M. Professor Antônio Lúcio (Balneário Camboriú); E. M. Professor Ave-lino Marcante (Joinville); E. M. Professora Ada Sant'Anna da Silveira (Joinville); E. M. Professora Anna Maria Harger (Joinville); E. M. Professora Laura Andrade (Joinville); E. M. Professora Maria Ivone Muller dos Santos (Navegantes); E. M. Professora Maria Regina Leal (Joinville); E. M. Professora Zulma do Rosário Miranda (Joinville); E. M. Santa Terezinha (Faxinal dos Guedes); E. M. São Roque (Timbó); E. M. Tomaz Francisco Garcia (Balneário Camboriú); E. M. Valentin João da Rocha (Joinville); E. M. Vereador Curt Alvino Monich (Joinville); Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis); Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul (Rio do Sul); Escola Barão do Rio Branco (Blumenau); E. Escola da Fazenda (Florianópolis); Escola Dinâmica (Florianópolis); Escola Engenho (Florianópolis); Escola Monteiro Lobato (Piçarras); E. Professor Felicidade Pinto Figueredo (Piçarras); Escola Sara-piquá (Florianópolis); Escola Técnica de Comércio de Tubarão (Tubarão); Exathum Curso e Colégio (Joinville); Fundação Bradesco (Laguna); Instituto Maria Auxiliadora (Rio do Sul); Kumon/Unidade de Joaçaba (Joaçaba); Kumon Centro Florianópolis (Florianópolis); Liceu Catarinense de Ensino (Balneário Camboriú); N. E. M. João Pedro Alberti (Bela Vista do Toldo); Núcleo Educacional Guilherme Bossow (Irineópolis); Núcleo Escolar Presidente Adolfo Konder (Irineópolis); SENAI/Centro de Educação e Tecnologia de Tubarão (Tubarão); SENAI/Centro de Tecnologia em Eletroeletrônica de Jaraguá do Sul (Jaraguá do Sul); SENAI/Itajaí (Itajaí); SENAI Joinville (Joinville); Sociedade Educacional Balneário Camboriú (Balneário Camboriú); Sociedade Educacional Verde Vale Ltda (Blumenau).



Artigo

Algumas propriedades notáveis das cônicas

Gustavo A. T. F. da Costa

Departamento de Matemática - UFSC
Florianópolis - SC

As cônicas, como são chamadas a parábola, a elipse e a hipérbole, têm as seguintes propriedades geométricas notáveis:

P.1. Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto da elipse com a equação $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 1) e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Os ângulos α e β que a reta r , tangente à elipse em P , faz, respectivamente, com as retas s , que passa nos pontos P e F_1 , e t , que passa nos pontos P e F_2 , são iguais.

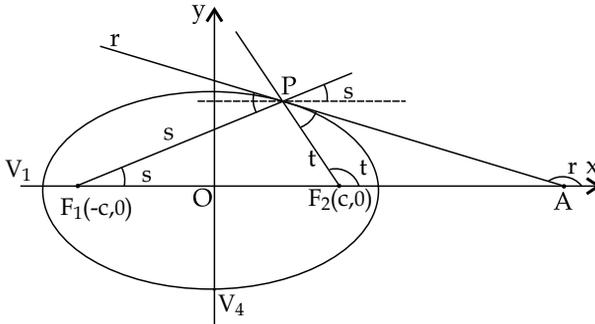


Figura 1: Elipse.

P.2. Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto da parábola com a equação $y_2 = 4kx, k > 0$ (Figura 2). Seja s a reta que passa nos pontos P e $F(k, 0)$, o foco da parábola e r , a reta tangente à parábola no ponto P . Além disso, seja l , a reta $y = y_0$. Os ângulos α e β que a reta r , tangente à parábola em P , faz com as retas s e l , respectivamente, são iguais.

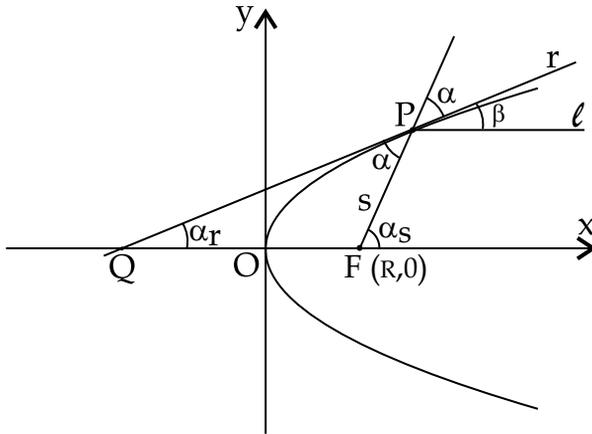


Figura 2: Parábola.

P.3. Se $P(x_0, y_0)$ é um ponto da hipérbole com a equação $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 3) e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, então os ângulos α e β que a reta s , tangente em P , faz, respectivamente, com as retas r , que passa nos pontos P e F_1 , e t , que passa nos pontos P e F_2 , são iguais.

As propriedades 1, 2 e 3, descritas acima, têm importantes aplicações práticas. Aliadas às propriedades de reflexão da luz e do som, elas são exploradas na construção de antenas e telescópios, no primeiro caso, e na construção de igrejas e auditórios, no segundo caso. O objetivo deste artigo é o de apresentar e provar estas propriedades geométricas utilizando as idéias da geometria analítica. Outras demonstrações são possíveis usando ou não idéias do cálculo diferencial. Detalhes sobre as aplicações podem ser encontrados nas referências.

Prova das propriedades

Em primeiro lugar explicamos o procedimento geral para obter a equação da reta tangente a uma cônica. Seja, então, $P(x_0, y_0)$ um ponto da cônica. Se neste ponto a reta tangente for vertical a equação da reta será $x = x_0$; se horizontal, $y = y_0$. Em outro ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ da cônica, a equação de uma reta passando em P é $y - y_0 = m(x - x_0)$. O coeficiente angular m da reta tangente em P pode ser

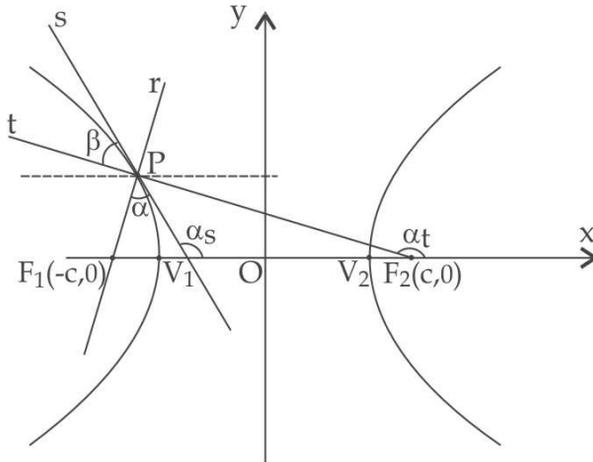


Figura 3: Hipérbole.

determinado isolando-se y na equação da reta e substituindo o resultado na equação da cônica. Obtemos, desse modo, uma equação em x da forma

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{1}$$

cujas raízes são

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2A} \tag{2}$$

O número $\Delta = B^2 - 4AC$ é o discriminante da equação e os coeficientes A, B e C dependem, em geral, de x_0, y_0 e de parâmetros próprios de cada cônica. Queremos que a raiz seja única e igual a x_0 , a abscissa do ponto de tangência. Devemos impor, então:

i) $\Delta = 0$;

ii) $x_0 = -\frac{B}{2A}$.

Ambas as condições implicam em uma equação na incógnita m cujo valor, no entanto, pode ser obtido mais facilmente através da condição *ii*). No que segue aplicamos esse procedimento a cada uma das cônicas.

Elipse

Consideremos a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 1). As retas tangentes aos vértices $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$, $V_3(0, b)$ e $V_4(0, -b)$, $a, b > 0$, são as retas verticais $x = \pm a$, e as retas horizontais $y = \pm b$. Num outro ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ obteremos a equação (1) com coeficientes

$$A = (b^2 + a^2m^2) \quad (3)$$

$$B = 2ma^2(y_0 - mx_0) \quad (4)$$

$$C = a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 \quad (5)$$

Da condição *ii*) relações (3) e (4), obtemos

$$x_0 = -\frac{a^2(y_0 - mx_0)m}{b^2 + a^2m^2} \quad (6)$$

cuja solução é

$$m = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2} \quad (7)$$

Parábola

Na Figura 2 mostramos a parábola $y^2 = 4kx$, $k > 0$. No vértice O , a reta tangente é a reta vertical $x = 0$. Num outro ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ obteremos a equação (1). Porém, no caso da parábola, os coeficientes são

$$A = m^2 \quad (8)$$

$$B = 2(y_0 - mx_0)m - 4p \quad (9)$$

$$C = (y_0 - mx_0) \quad (10)$$

Substituindo (8) e (9) na condição *ii*) obtemos

$$x_0 = -\frac{(y_0 - mx_0)m - 2p}{m^2} \quad (11)$$

cuja solução é

$$m = -\frac{2p}{y_0} \quad (12)$$

Hipérbole

No caso da hipérbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 3), as retas tangentes nos vértices $V_1(-a, 0)$ e $V_2(+a, 0)$, $a, b > 0$, têm equações $x_0 = -a$ e $x = a$, respectivamente.

Consideremos outro ponto $P(x_0, y_0)$ da hipérbole. Nesse caso, a equação (1) segue com os coeficientes

$$A = (b^2 - a^2m^2) \quad (13)$$

$$B = -2a^2(y_0 - mx_0)m \quad (14)$$

$$C = -a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 \quad (15)$$

Substituindo (16) e (17) na condição *ii*), resulta

$$m = \frac{x_0b^2}{y_0a^2} \quad (16)$$

No que segue provamos as propriedades P1-P3.

P1. Examinando a Figura 1, esta propriedade é imediata em alguns pontos especiais. Nos pontos $P = V_3(0b)$ ou $P = V_4(0, -b)$ o triângulo é isósceles. Logo, pela geometria da figura obtemos $tg\alpha = tb\beta = \frac{b}{c}$, e nos pontos $P = V_1$ ou $P = V_2$, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. Consideremos, então, os demais casos.

Caso 1. $x_0 \neq c, -c$

Sejam s a reta que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_1(-c, 0)$, e α_s sua inclinação. Seu coeficiente angular é então $m_s = \frac{y_0}{x_0 + c}$. Seja r a reta tangente à elipse no

ponto P e α_r sua inclinação. Seu coeficiente angular foi obtido na seção anterior: $m_r = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$. Pela figura, vê-se que $\alpha + \alpha_r = \pi + \alpha_s$, ou seja, $\alpha = \alpha_s - \alpha_r + \pi$, e, portanto, $tg\alpha = tg(\alpha_s - \alpha_r)$. Como

$$tg(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{tg\alpha_s - tg\alpha_r}{1 + tg\alpha_s \cdot tg\alpha_r}$$

$$tg\alpha = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \quad (17)$$

Substituindo os valores de m_r e m_s na fórmula (1) e simplificando, resulta

$$tg\alpha = tg(\alpha_r - \alpha_s) = \frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 + b^2 x_0 c}{a^2 y_0 x_0 + c a^2 y_0 - x_0 y_0 b^2} = \frac{b^2}{c y_0} \quad (18)$$

Para obter este último resultado usamos $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ e $b^2 = a^2 - c^2$ no numerador e denominador, respectivamente.

A reta t que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_2(c, 0)$ tem inclinação α_t e coeficiente angular $m_t = \frac{y_0}{x_0 - c}$. Considere o triângulo F_2PA onde se tem $\beta + \alpha_t + \pi - \alpha_r = \pi$. Segue disto que $\beta = \alpha_r - \alpha_t$ donde

$$tg\beta = \frac{m_r - m_t}{1 + m_t \cdot m_r} \quad (19)$$

Substituindo os valores de m_r e m_t nesta última relação, deduz-se o resultado

$$tg\beta = \frac{b^2}{c y_0} \quad (20)$$

Comparando (18) e (20), $\alpha = \beta$.

Caso 2. $x_0 = -c$

Neste caso, $y_0 = \frac{b^2}{a}$ e a reta s é vertical. Nesta situação $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_r$ e

$$tg\alpha = \frac{1}{m_r} = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} = \frac{a^2 y_0}{b^2 c} = \frac{a}{c} \quad (21)$$

Pela geometria da figura, nesse caso, $\beta = \pi - \alpha_t + \alpha_r$, donde $tg\beta = tg(\alpha_r - \alpha_t)$ de sorte que

$$tg\beta = \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t} = \frac{b^2}{cy_0} = \frac{a}{c} \tag{22}$$

Portanto, $\alpha = \beta$. Deixamos a prova nos casos $y_0 = -\frac{b^2}{a}$ e $x_0 = +c$ e $y_0 = \pm\frac{b^2}{a}$ como exercício.

P2. No ponto $O(0, 0)$, o vértice da parábola, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. Vejamos nos demais pontos.

Caso 1. $x_0 \neq 0$, e $x_0 \neq k$.

Sabemos que a reta tangente em P tem coeficiente angular $m_r = \frac{y_0}{2x_0}$. Seja l a reta $y = y_0$ cujo coeficiente angular é $m_l = 0$. Pela Figura 2, vê-se que $\beta = \alpha_r$ e, assim,

$$tg\beta = m_r = \frac{y_0}{2x_0} \tag{23}$$

Quanto a α , observa-se que $\alpha = \alpha_s - \alpha_r$ e, assim,

$$tg\alpha = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \tag{24}$$

A reta s tem coeficiente angular $m_s = \frac{y_0}{x_0 - p}$. Substituindo os valores de m_s e m_r na equação (24), obtém-se o mesmo valor dado pela equação (23) seguindo-se que $\alpha = \beta$.

Caso 2. $x_0 = k$.

Como $y_0^2 = 4kx_0$, então $y_0 = \pm 2k$. Verifiquemos a propriedade no caso $y_0 = 2k$ em que a reta tangente tem coeficiente angular $m_r = \frac{y_0}{2x_0} = 1$. Sendo assim, $\beta = \alpha_r = \frac{\pi}{4}$. Somando os ângulos internos do triângulo retângulo QFP (pois na situação presente a reta s é vertical) resulta $\alpha_r + \alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$. De forma

análoga prova-se o resultado quando $y_0 = -2p$.

P3. Nos vértices da hipérbole esta propriedade é facilmente percebida com ângulos iguais a $\frac{\pi}{2}$. Os demais casos são os seguintes:

Caso 1. $x_0 \neq c, -c$.

Seja r uma reta que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_1(-c, 0)$ (Figura3). Esta reta tem coeficiente angular $m_r = \frac{y_0}{x_0 + c}$. A reta tangente s , como já deduzimos, tem coeficiente angular:

$$m_r = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 - a^2} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \quad (25)$$

Pela geometria da figura vê-se que $\alpha = \alpha_s - \alpha_r$ de forma que $tg\alpha$ é dada pela equação (24). Substituindo os valores de m_r e m_s nesta relação, e simplificando, obtemos:

$$tg\alpha = tg(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{b^2 x_0 c + b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2}{a^2 y_0 c + a^2 y_0 x_0 + x_0 y_0 b^2} = \frac{b^2}{c y_0} \quad (26)$$

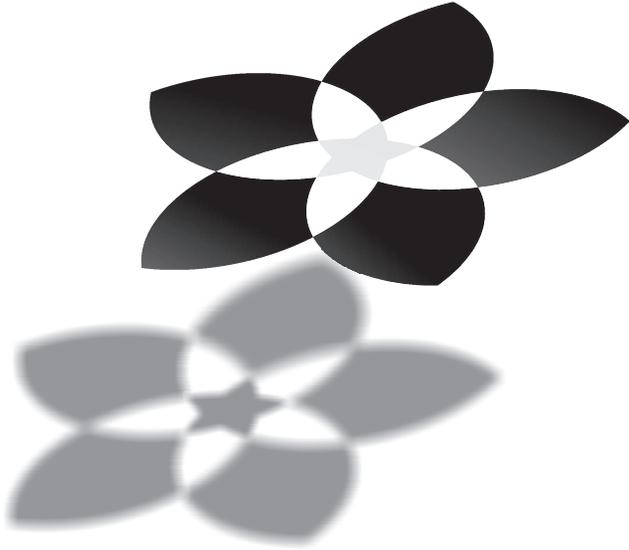
Na obtenção deste último resultado usamos $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ e $b^2 = c^2 - a^2$ no numerador e denominador, respectivamente.

A reta que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_2(c, 0)$ tem coeficiente angular $m_t = \frac{y_0}{x_0 - c}$. Além disso, $\beta = \alpha_t - \alpha_s$. Seguindo o procedimento anterior resulta $tg\beta = \frac{b^2}{c y_0}$, donde segue o resultado.

Os casos $x_0 = c, -c$ são tratados da mesma forma que na elipse. Deixamos a verificação como exercício para o leitor.

Referências

- [1] VALLADARES, Renato J. C. - *Elipse, Sorrisos e Sussurros*. IN: Revista do Professor de Matemática, V. 36, 1998, P. 24-28.
- [2] ÁVILA, Geraldo - *A Hipérbole e os Telescópios*. IN: Revista do Professor de Matemática, V. 34, 1997, P. 22-27.
- [3] WAGNER, Eduardo - *Porque as antenas são parabólicas*. IN: Revista do Professor de Matemática, V. 33, 1997, P. 10-15.
- [4] SIMMONS, George F. - *Cálculo com Geometria Analítica*, V. 2. Editora McGraw Hill, 1998.
- [5] LEHMANN, C. H. - *Geometria Analítica*. Editora Globo, 2007.



Artigo

“Anatomia” de uma solução

José Luiz Rosas Pinho

Departamento de Matemática - UFSC
Florianópolis - SC

Nestas notas apresentamos uma demonstração de uma estimativa ótima em geometria plana para um triângulo qualquer. Essa estimativa, um problema conhecido e citado em textos de geometria plana elementar, consiste de duas desigualdades envolvendo uma mesma expressão. Nossa proposta é fazer a demonstração a partir da análise de casos particulares e, por “aproximações sucessivas”, chegar ao caso geral. Este procedimento permite expor as idéias que geram a demonstração. O título sugere um trabalho de “dissecção” da solução, um processo “cirúrgico” que deixa à mostra mais apropriadamente a “anatomia” do problema do que da solução em si. O título é também uma alusão bem-humorada à linguagem usada pelos topólogos que, com suas técnicas de “cortar” e “colar” figuras, realizam verdadeiras “cirurgias” matemáticas (topologia algébrica).

Consideremos o seguinte:

Problema: Sejam a , b e c os lados de um triângulo. Mostre que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Mostre ainda que o valor da desigualdade à esquerda pode ser atingido, e que a estimativa da desigualdade à direita é ótima, ou seja, se x é um número menor do que 2, então existe um triângulo de lados a , b e c tal que a soma na expressão acima é maior do que x .

Solução:

Vejam, inicialmente, o que ocorre no caso do triângulo equilátero (Figura 4), que é o polígono regular de três lados.

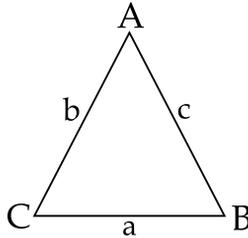


Figura 4: Triângulo Equilátero

Sejam $a = b = c = k$ as três medidas dos lados iguais. Então:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{3k}{k+k} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$$

Portanto, no caso do triângulo equilátero, o valor da primeira desigualdade é atingido.

Isto já responde uma pequena parte do problema.

Vamos agora analisar a segunda desigualdade.

Sejam a, b e c as medidas dos três lados de um triângulo qualquer. Note que uma estimativa simples (e mais grosseira - no sentido de que o valor que limita superiormente a soma é maior do que o valor proposto) seria

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3,$$

que decorre das desigualdades $\frac{a}{b+c} < 1$, $\frac{b}{a+c} < 1$ e $\frac{c}{a+b} < 1$, e que por sua

vez decorrem da desigualdade triangular

$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< a + b \end{aligned}$$

Observe agora que uma primeira tentativa de se provar a segunda desigualdade seria considerar, de forma homogênea, que cada parcela da soma fosse menor do que $\frac{2}{3}$, de maneira que a soma fosse menor do que 2. Mas se, por exemplo, tivermos $\frac{a}{b+c} < \frac{2}{3}$ então $3a < 2(b+c)$, o que não precisa necessariamente ocorrer. Por exemplo, se $a = 5, b = 4$ e $c = 3$.

Uma segunda tentativa, menos simples, seria considerar que cada parcela fosse menor do que uma fração que dependesse das medidas dos lados e que, somadas, resultassem no valor 2. O que as três frações das parcelas têm em comum ou poderiam vir a ter em comum? Podemos observar que se somássemos, em cada uma delas, o numerador ao denominador este ficaria sempre igual a $a + b + c$.

Então é razoável comparar uma fração $\frac{p}{q}, p > 0$ e $q > 0$, com a fração resultante da soma do numerador ao próprio numerador e ao denominador. Observe que:

$$\frac{p}{q} < \frac{2p}{p+q} \Leftrightarrow p^2 + pq < 2pq \Leftrightarrow p^2 < pq \Leftrightarrow p < q,$$

ou seja, se o numerados é menor do que o denominador, então a fração original permanece menor do que a fração modificada.

Atenção: observe que as implicações acima têm duplo sentido, ou seja, a primeira desigualdade da esquerda implica na última desigualdade da direita e vice-versa.

Resulta daí que, como $a < b + c, b < a + c$ e $c < a + b$, pela desigualdade triangular, então

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} &< \frac{2a}{a+b+c} \\ \frac{b}{a+c} &< \frac{2b}{a+b+c} \\ \frac{c}{a+b} &< \frac{2c}{a+b+c} \end{aligned}$$

e, somando, obtemos

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2,$$

provando a segunda desigualdade.

Vejamos agora porque esta estimativa é ótima, ou seja, se dado $x < 2$, então existe um triângulo de lados a, b e c tal que

$$x < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$$

O raciocínio consiste agora em se perguntar: para que tipo de triângulo a soma das frações acima fica “bem perto” de 2? Analisando os triângulos isósceles, que são os triângulos mais “regulares” depois do triângulo equilátero, podemos perceber que se suas laterais forem bem maiores do que a base, então estaremos “bem perto” de 2, pois duas das frações da soma estarão “perto” de 1 (Figura 5):

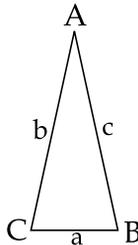


Figura 5: Triângulo Isósceles

Sejam $b = c = k$, então $\frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{k}{a+k} \approx 1$, se $\frac{a}{k} \approx 0$, ou seja, se k é “bem maior” do que a .

De fato, dado x e fixando o valor a , se tomarmos $\frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{k}{a+k} = \frac{x}{2}$, ou seja, se tomarmos $k = \frac{ax}{2-x}$, valor obtido quando resolvemos a equação em k , teremos que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} + 2\frac{x}{2} > x.$$

Voltemos agora a analisar a primeira desigualdade. Olhemos novamente para o triângulo isósceles com lados de medidas a e $b = c = k$. Já vimos que se k é “muito grande” em relação a a , então a soma das frações é “quase igual” a 2 e , portanto, maior que $\frac{3}{2}$.

Se o triângulo for equilátero, ou seja, se $a = b = c = k$, então a soma é igual a $\frac{3}{2}$. Se $b = c \approx \frac{a}{2}$ (Figura 6), então

$$\frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} \approx \frac{\frac{a}{2}}{a+\frac{a}{2}} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{a}{b+c} \approx 1,$$

e assim teremos

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \approx \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} > \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

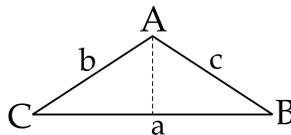


Figura 6: Triângulo Isósceles com laterais um pouco maiores que metade da base

Na verdade temos $b = c > \frac{a}{2}$ e então $\frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} > \frac{1}{3}$ pois

$$3b > a + c = a + b \Leftrightarrow 2b > a \Leftrightarrow b > \frac{a}{2}.$$

Por outro lado, como $b + c > a$, então $\frac{a}{b+c} < 1$. Apesar dos sentidos das desigualdades, veremos que, a soma será maior que $\frac{3}{2}$, em qualquer triângulo isósceles.

Note que se $b = c = k$ teremos

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{2k} + \frac{2k}{a+k} = \frac{a^2 + ak + 4k^2}{2k(a+k)}.$$

e que

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + ak + 4k^2}{2k(a+k)} &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 2ak + 8k^2 &\geq 6ak + 6k^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 - 2ak + k^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - k)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

o que é verdade. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $a = k$, ou seja, se o triângulo for equilátero.

Finalmente consideremos um triângulo escaleno de lados com medidas a, b e c . Suponha, sem perda de generalidade, que $a > b > c$.

Observe que, nos triângulos isósceles, fixada a medida da base a , todos os valores entre $\frac{3}{2}$ e 2 devem ser atingidos: partindo de uma altura “muito grande” e estando “perto” de 2 (que não é de fato atingido), diminuindo então até chegar no triângulo equilátero (atingindo o valor $\frac{3}{2}$ com todos os lados iguais ao valor a), e passando novamente a crescer até se aproximar do valor $\frac{5}{3}$ (que não é mais atingido). Esta análise, intuitiva no momento, poderá ser comprovada com as ferramentas desenvolvidas no Cálculo.

Esta observação nos permite o seguinte raciocínio: se todos os valores são atingidos nos triângulos isósceles, então nada mais razoável do que comparar qualquer

triângulo escaleno com algum triângulo isósceles. Mas qual?

Vamos tomar o lado de medida a como base e vamos comparar este triângulo com um outro triângulo com lados de medidas $a' = a$, $b' = c' = \frac{b+c}{2} = k$ (Figura 7).

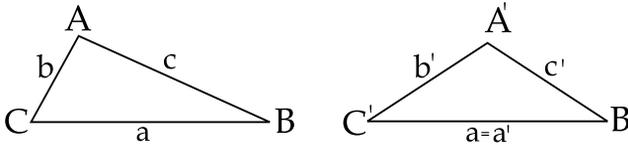


Figura 7: Triângulo escaleno comparado com um triângulo isósceles

Note que $b' + c' = b + c = 2k$, portanto, $\frac{a'}{b' + c'} = \frac{a}{b + c}$. A vantagem então de considerar o segundo triângulo é que, para provarmos a primeira desigualdade, bastará provar que $\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b'}{a+c'} + \frac{c'}{a+b'}$ pois, como já vimos, no triângulo isósceles vale aquela desigualdade.

Então vejamos:

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{ab + b^2 + ac + c^2}{(a+c)(a+b)} \geq \frac{ab + b^2 + ac + c^2}{(a+c')(a+b')}$$

pois

$$\begin{aligned} (a+c)(a+b) &\leq (a+c')(a+b') = (a+k)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + a(b+c) + bc &\leq a^2 + 2ak + k^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow bc &\leq k^2. \end{aligned}$$

Esta última desigualdade à direita é verdadeira pois, de $b+c = 2k$, temos $c = 2k - b$ e então

$$bc = b(2k - b) = 2kb - b^2 \leq k^2 \Leftrightarrow k^2 - 2kb + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (k - b)^2 \geq 0,$$

o que é verdade.

Assim, para provarmos que:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{b'}{a+c'} + \frac{c'}{a+b'} = \\ &= \frac{ab' + b'^2 + ac' + c'^2}{(a+c')(a+b')}, \end{aligned}$$

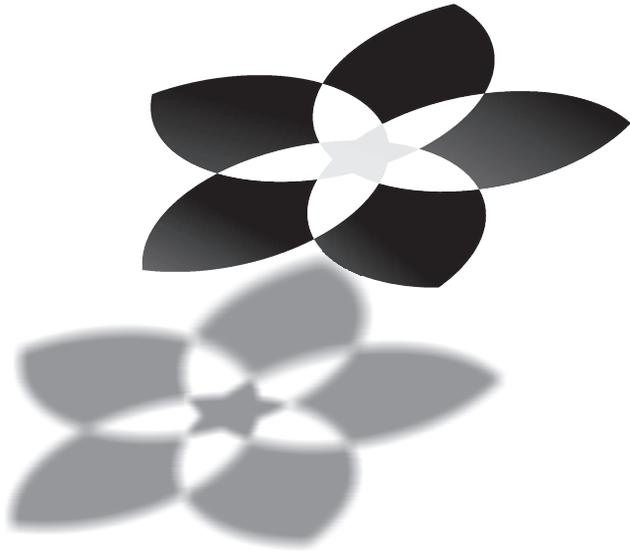
basta provar agora que $ab + b^2 + ac + c^2 \geq ab' + b'^2 + ac' + c'^2$

Mas

$$\begin{aligned} ab + b^2 + ac + c^2 &\geq ab' + b'^2 + ac' + c'^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 + a(b+c) &\geq b'^2 + c'^2 + a(b'+c') \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 &\geq b'^2 + c'^2 \end{aligned}$$

De $b+c = b'+c'$ temos que $(b+c)^2 = (b'+c')^2$, ou $b^2 + 2bc + c^2 = b'^2 + 2b'c' + c'^2$, e como $bc \leq b'c' = k^2$ então $b^2 + c^2 \geq b'^2 + c'^2$.

Note que, nas desigualdades acima, vale a igualdade se, e somente se, $b = c = k$, o que não ocorre no caso do triângulo escaleno pois assumimos que $a > b > c$.



Artigo

Princípio da Balança de Arquimedes

Asteroide Santana ¹

asteroidemtm@yahoo.com.br

Faremos uma viagem no tempo, a fim de estudar um pouco de geometria plana e espacial através do princípio da balança. Mas antes vamos apenas lembrar quem foi Arquimedes. Nascido em 287 a.C. na cidade de Siracusa, localizada na ilha da Sicília, que fazia parte do mundo grego, Arquimedes foi o maior matemático da antiguidade e considerado um dos maiores gênios de todos os tempos. Suas inúmeras obras foram fundamentais para o desenvolvimento da geometria, dentre as quais podemos destacar “A Esfera e o Cilindro”, “Quadratura da Parábola”, “Equilíbrio dos Planos” e “O Método”.

Há dois mil anos, quando a álgebra e as equações algébricas ainda eram desconhecidas, a Matemática se construía unicamente através da geometria. Nesse cenário de poucos recursos, Arquimedes chegou a grandes resultados dos quais extraímos esta amostra. Com auxílio das ferramentas da matemática moderna, o *Cálculo* por exemplo, os resultados que vamos apresentar podem ser obtidos de forma bem simplória, assim a relevância das construções dos matemáticos daquela época se foca na criatividade dos recursos utilizados.

Objetivos

Nosso objetivo aqui é encontrar, através do *Princípio da Balança de Arquimedes* (ou *Método de Equilíbrio de Arquimedes*), a saber, a razão entre o volume de um cilindro e um parabolóide de revolução (a definir), inscrito neste mesmo cilindro. Para tanto, vamos obter por meio de uma simples construção geométrica a relação de equilíbrio da balança que consiste no seguinte: se a balança representada na Figura 8 está em equilíbrio, então

$$c_1 \cdot G_1 = c_2 \cdot G_2, \quad (I)$$

em que c_1 e c_2 são, respectivamente, o comprimento do “braço” esquerdo e direito

¹Graduando do curso de Matemática-Licenciatura e bolsita PIBIC/CNPQ da UFSC.

da balança; G_1 e G_2 correspondem a uma determinada grandeza (área, volume ou comprimento) das Figuras G_1 e G_2 apoiadas na extremidade do respectivo “braço”; e F é o fulcro² da balança. Em outras palavras, dizemos que: *duas grandezas se equilibram a uma distância inversamente proporcional às próprias grandezas.*

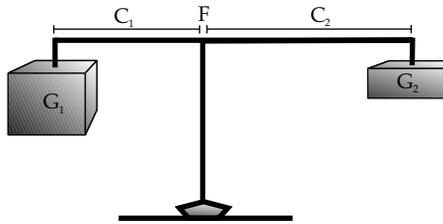


Figura 8: Balança de Arquimedes.

A Balança

Definição 1. A parábola é o lugar geométrico de todos os pontos do plano, equidistantes de uma reta r fixa e de um ponto P fixo não incidente em r . O ponto P é dito foco e r é denominada diretriz desta parábola.

Definição 2. Considere uma parábola e dois pontos distintos Q e D incidentes na mesma. Seja r a reta paralela a QD , tangente à curva no ponto P , e V o ponto médio de QD . Nessas condições dizemos que a região delimitada pela curva QPD e pelo segmento QD é um **segmento de parábola** (ou luna de parábola), onde qualquer segmento de reta RV paralelo a PV , inclusive, é dito diâmetro desse segmento de parábola. Além disso, todo segmento $Q'D'$ paralelo a QD é denominado uma corda desse mesmo segmento de parábola DPQ de base QD e vértice P . (Ver Figura 9)

Proposição 1. Seja DPQ um segmento de parábola de vértice P e base QD , e seja ainda T a intersecção da tangente à curva passando por Q com o prolongamento do diâmetro PV (V é ponto médio de QD), conforme a Figura 10. R é um ponto qualquer da curva e OR um diâmetro por este ponto. Se F e E são, respectivamente, as intersecções da reta OR com as retas QP e QT , então $\frac{QO}{OD} = \frac{ER}{RO}$.

²Ponto de equilíbrio da balança quando a mesma se encontra vazia.

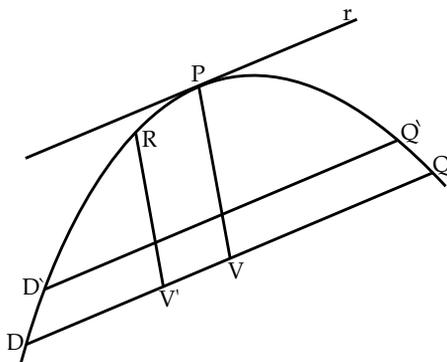


Figura 9: Seguimento de parábola.

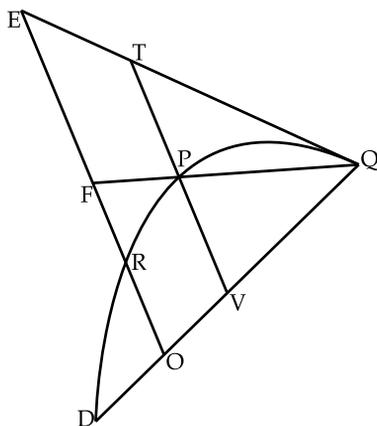


Figura 10: Propriedade da parábola.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada na referência [2].

Proposição 2. Seja DPQ um segmento de parábola de vértice P e base QD , e T a intersecção da tangente à curva por Q com o prolongamento do diâmetro PV ,

conforme a Figura 11 (V ponto médio de QD). Seja ainda $BK = BQ$, onde B é o ponto de intersecção da reta DA (paralela a PV) com a reta QP . Se R e F são respectivamente a intersecção da reta OE (paralela a PV) com a curva e com a reta QP , então $BF \cdot OE = KB \cdot OR$.

Foi com esta construção que Arquimedes demonstrou a veracidade da relação (I) de equilíbrio da balança. Pois, se B é o fulcro da balança de braços BF e BK , então podemos dizer que o segmento OE , apoiado no ponto F , equilibra-se com o segmento OR apoiado no ponto K .

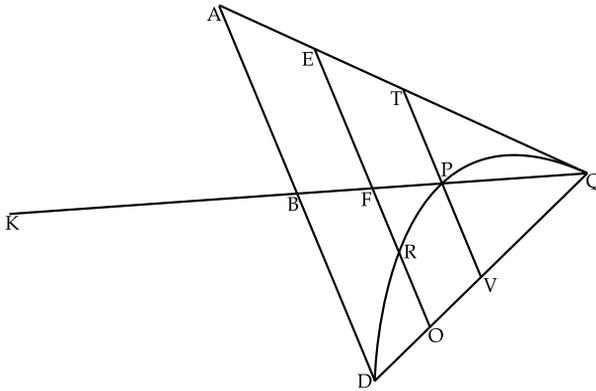


Figura 11: Relação de equilíbrio.

Demonstração. Pela *Proposição 1*, temos que $\frac{QO}{OD} = \frac{ER}{RO}$, e por paralelismo vem que,

$$\frac{QF}{FB} = \frac{QO}{OD} = \frac{ER}{RO} \Rightarrow \frac{QF}{FB} = \frac{ER}{RO} \Rightarrow QF \cdot RO = ER \cdot FB,$$

Somando-se ($FB \cdot RO$) aos dois lados desta igualdade obtemos

$$\begin{aligned} QF \cdot RO + FB \cdot RO &= ER \cdot FB + FB \cdot RO \\ RO(QF + FB) &= FB(ER + RO) \\ RO \cdot QB &= FB \cdot EO \\ RO \cdot KB &= FB \cdot EO \end{aligned}$$



Na proposição acima, consideramos a intersecção de apenas uma reta passando por R . Imagine agora, se para cada ponto da curva QPD traçarmos um diâmetro e aplicarmos a mesma relação da *proposição 2*. Observe que nesse caso seria possível manter o equilíbrio da balança, apoiando-se todos os segmentos OR da parábola no ponto K e simultaneamente todos os segmentos EO do triângulo $\triangle DQA$ no mesmo ponto onde cada um se encontra. Pressupondo que nessa situação a união de todos os segmentos OR constituem a área do segmento de parábola e a união de todos os segmentos OE constituem a área do triângulo, pendure mentalmente o segmento de parábola no ponto K e o triângulo no seu centro de gravidade, situado na intersecção das medianas, ou seja, sobre o segmento BQ , distante $\frac{1}{3}BQ$ do ponto B . O resultado deste processo está representado na Figura 12. Aplicando a relação (I) resulta que a área do segmento de parábola corresponde a um terço da área do triângulo em questão.

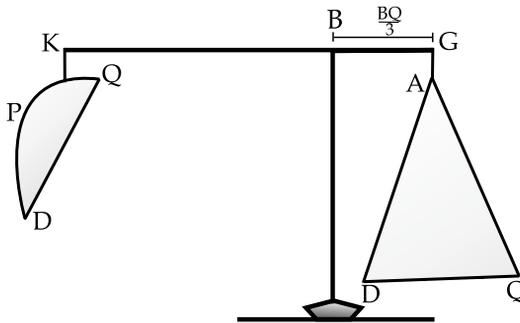


Figura 12: Pesando o triângulo e a parábola.

Com base nesse raciocínio, Arquimedes calculou a razão entre o volume de diversos sólidos, dentre os quais estão aqueles que vamos apresentar em seguida.

Equilíbrio de sólidos

Proposição 3. Seja QPD um segmento de parábola de vértice P e base DQ . Se V é o ponto médio de DQ então PV é proporcional a $(DV)^2 = (QV)^2$, isto é,

$PV = (DV)^2 \cdot k = (QV)^2 \cdot k$, sendo k constante para toda corda que tomarmos paralela à base DQ .

Demonstraremos o caso particular em que a corda DQ é perpendicular ao diâmetro PV , o caso geral foi demonstrado por Arquimedes no livro *Elementos das Cônicas*.

Demonstração. A intersecção de um plano com um cone reto³ gera uma parábola como na figura abaixo (a demonstração desse fato pode ser encontrada na Revista Nº 4 da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina, páginas 81 e 82, 2007.).

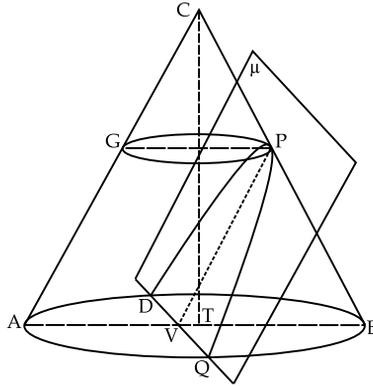


Figura 13: A parábola a partir da intersecção de um plano com um cone reto.

Na Figura 13, P é o vértice da parábola e PV é paralelo a geratriz AC do cone. GP é paralelo a AB e, portanto, os segmentos AV e GP são congruentes. Como os pontos C, G, A, T, B , e P pertencem a um mesmo plano, temos por congruência e semelhança de triângulos (verifique isto) que o triângulo $\triangle GPC$ é isósceles com $CG \equiv CP$.

Como QD é perpendicular a AB , temos da semelhança dos triângulos $\triangle AVD$ e $\triangle BVD$ que $AV = \frac{(VD)^2}{BV}$. Lembre-se que a base do cone é uma circunferência, ou seja,

$$GP = \frac{(VD)^2}{VB} \Rightarrow VB = \frac{(VD)^2}{GP} \quad (\text{II})$$

³É aquele cujo eixo central é perpendicular ao centro da circunferência que constitui sua base.

Da semelhança dos triângulos $\triangle CGP$ e $\triangle PVB$, temos

$$\frac{CG}{GP} = \frac{PV}{VB} \rightarrow PV = \frac{CG}{GP} \cdot VB \quad (\text{III})$$

De (II) e (III) obtemos

$$PV = \frac{CG}{GP} \cdot \frac{(VD)^2}{GP} = (VD)^2 \cdot \frac{CG}{(GP)^2}$$

Note que $\frac{CG}{GP}$ é constante para toda circunferência de centro T e raio $TB = TA$ que tomarmos, isto é, $\frac{CG}{(GP)^2} = K$ é constante para toda corda QD da parábola QPD . Portanto,

$$PV = (VD)^2 \cdot K = (VQ)^2 \cdot K,$$

como queríamos demonstrar. ■

Imaginemos agora uma balança de forma que a distância entre as extremidades M e N dos “braços” meça $2d$, e o fulcro F esteja localizado exatamente no ponto médio de MN .

Coloquemos em um dos “braços” da balança um cilindro C e um parabolóide de revolução⁴ P inscrito ao mesmo, ambos de altura d conforme a Figura 14. Cabe lembrar que os dois objetos em questão são sólidos e para efeito de cálculo, devemos supor que ambos ocupam o mesmo lugar no espaço.

Considere agora um plano μ , perpendicular à reta que contém MN , interceptando os dois sólidos a uma distância x , **qualquer**, de F (ver Figura 15). Essa intersecção dá origem ao círculo-seção P_x do parabolóide e ao círculo-seção C_x do cilindro. Sejam então, y e z os raios de P_x e de C_x , nesta ordem. Pela *Proposição 3*, temos que

$$x = y^2 \cdot k \Rightarrow y^2 = x \cdot \frac{1}{k} \quad (\text{IV}) \quad \text{e} \quad d = z^2 \cdot k \Rightarrow z^2 = d \cdot \frac{1}{k} \quad (\text{V})$$

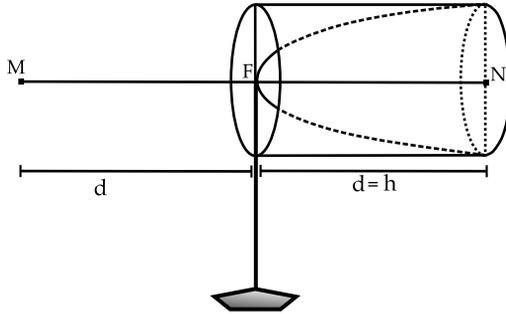


Figura 14: Colocando o parabolóide e o cilindro na balança.

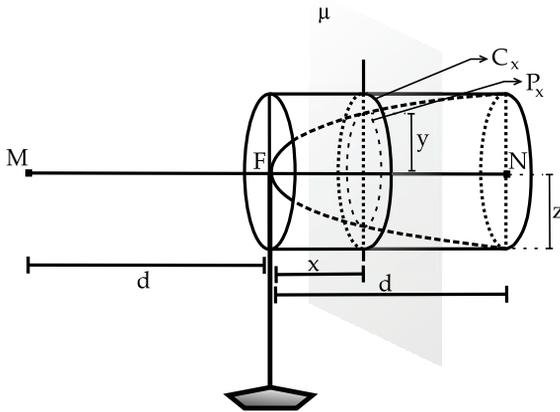


Figura 15: Plano vertical interceptando os sólidos.

Observação 1. Note que a constante k é a mesma para as duas relações, pois y e z são raios contidos em cordas da mesma parábola.

Além disso, sabemos que a área A_{P_x} do círculo-seção P_x é dada por

⁴Um parabolóide de revolução é a figura espacial (nesse caso um sólido) que se obtém da rotação de uma parábola em torno do eixo que contém o foco e o vértice da mesma.

$$A_{P_x} = \pi y^2 \Rightarrow \pi = \frac{A_{P_x}}{y^2},$$

e, da mesma forma, a área A_{C_x} do círculo-seção C_x é dada por

$$A_{C_x} = \pi z^2 \Rightarrow \pi = \frac{A_{C_x}}{z^2}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \frac{A_{P_x}}{y^2} &= \frac{A_{C_x}}{z^2} \Rightarrow A_{P_x} \cdot z^2 = A_{C_x} \cdot y^2 \Rightarrow A_{P_x} \cdot d \cdot \frac{1}{k} = A_{C_x} \cdot x \cdot \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow A_{P_x} \cdot d = A_{C_x} \cdot x, \end{aligned} \tag{VI}$$

ou seja, a uma distância d (à esquerda do fulcro), o círculo-seção P_x equilibra-se com o círculo-seção C_x a uma distância x (à direita do fulcro), conforme mostra a Figura 16.

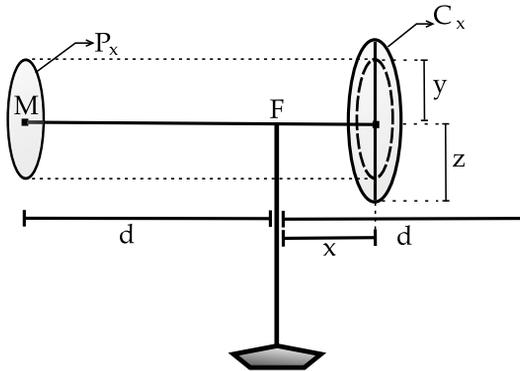


Figura 16: Resultado de uma seção.

Lembre-se que a relação (VI) vale para qualquer plano μ que tomarmos entre F e N (inclusive), pois escolhemos x de forma genérica. Assim, se para cada ponto x entre F e N interceptarmos um plano nas mesmas condições do plano μ , e em seguida repetirmos o processo anterior para cada um desses infinitos⁵ planos, podemos

⁵Pois entre dois pontos distintos incidentes a uma reta existem infinitos pontos.

concluir que o parabolóide apoiado na extremidade esquerda da balança (ponto M) se equilibra com o cilindro apoiado no seu lugar inicial. (Ver Figura 18)

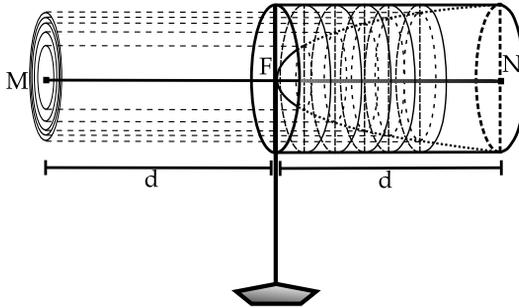


Figura 17: Resultado de várias secções.

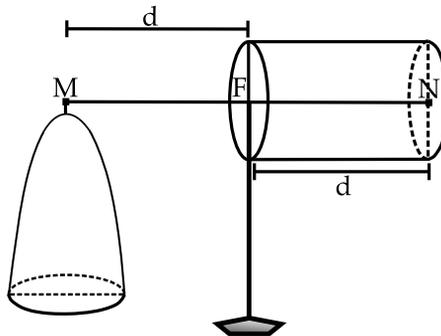


Figura 18: Resultado de infinitas secções.

Pressupondo que o centro de massa (centro de equilíbrio) do cilindro está no ponto médio da sua altura - representado pelo ponto P (Ver Figura 19) localizado a uma distância $\frac{d}{2}$ à direita do fulcro, concluímos que o volume do cilindro V_c suspenso no ponto P , equilibra-se com o volume do parabolóide V_p suspenso no ponto M , situado

na extremidade do “braço” esquerdo da balança.

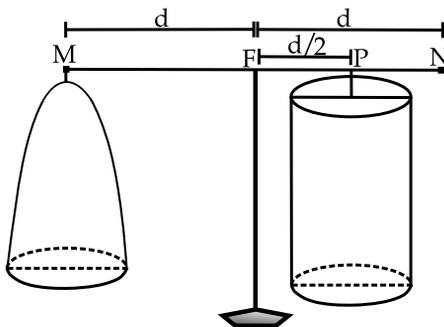


Figura 19: Resultado final.

Logo, pela relação (I):

$$V_p \cdot d = V_c \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow V_p = \frac{V_c}{2}.$$

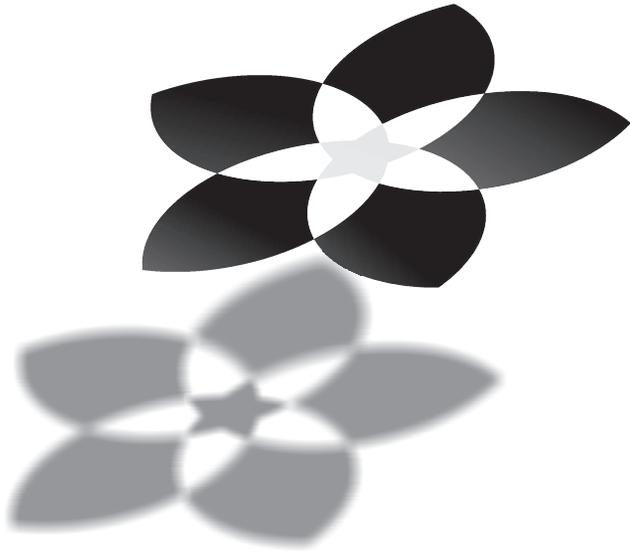
Portanto o volume do cilindro que circunscreve o parabolóide é igual a duas vezes o volume do mesmo parabolóide.

Conclusão

Evidentemente esses procedimentos utilizados por Arquimedes não têm rigor matemático suficiente para serem considerados uma demonstração. Por outro lado, se fizermos uso do moderno conceito de limites é possível tornar o método perfeitamente rigoroso e, inclusive, comparar com o usual conceito de integração. Para ressaltar ainda mais a importância do trabalho apresentado aqui, cabe lembrar que foi através dessas invenções que matemáticos europeus como Johann Kepler fizeram os primeiros trabalhos de diferenciação que conhecemos hoje.

Referências

- [1] BOYER, Carl B. - *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1974.
- [2] HEATH, T. L. - *The Works of Archimedes*. Editora Cambridge University Press. 1897.
- [3] COSTA, Gustavo A. T. F. - *O cone e as Cônicas*. IN: Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, V. 4, 2007, P. 79-89.



Artigo

Uma extensão do Teorema de Steiner-Lehmus.

Paulo Ricardo Boff⁶

paulo@pet.mtm.ufsc.br

De acordo com a história disponível, em 1840, *Daniel Christian Ludolf Lehmus* (1780-1863), então professor em Berlim, escreveu uma carta ao suíço *Jacob Steiner* (1796-1863), o qual é considerado um dos geômetras mais importantes desde os tempos de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.), pedindo-lhe uma demonstração “puramente geométrica” da solução do seguinte problema: *Se duas bissetrizes internas distintas de um triângulo forem iguais então o triângulo é isosceles*, que mais tarde viria a ser conhecido como o *Teorema de Steiner-Lehmus*.

Steiner encontrou, de fato, uma prova, e a publicou em 1844. Já Lehmus provou o teorema independentemente em 1850. Desde então este teorema foi provado por matemáticos e amadores. Mais de 80 provas corretas são, hoje, conhecidas.

O objetivo deste artigo é expor uma demonstração do Teorema de Steiner-Lehmus feita por redução ao absurdo, provar um teorema análogo, que chamaremos aqui de “Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus”, no qual consideramos a igualdade de duas cevianas de Gergonne e, por fim, faremos uma extensão do primeiro teorema. Para tanto, consideremos, primeiramente, alguns conceitos básicos:

Definição 1. Ceviana de um triângulo ABC é um segmento que une um dos vértices a um ponto qualquer da reta que contém o lado oposto a esse vértice.

Definição 2. A bissetriz de um ângulo é uma semi-reta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes. E a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo é a ceviana contida na bissetriz desse ângulo.

Proposição 1. Seja ABC um triângulo qualquer de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ opostos aos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , respectivamente. Então $a \leq b \leq c$ se, e

⁶Graduando em Matemática e Computação Científica e bolsista PIBIC/CNPq da UFSC. E gostaria de agradecer o Professor José Luiz Rosas Pinho e os colegas Asteroide, Bianca, Edson e Leonardo por suas valiosas sugestões e correções de texto.

somente se, $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$.

A demonstração desta proposição deixaremos a cargo do leitor. Uma dica é aplicar a Lei dos Senos⁷ no triângulo ABC .

Teorema de Steiner-Lehmus. *Se duas bissetrizes internas distintas de um triângulo forem iguais o triângulo é isósceles.*

Após identificarmos os triângulos apropriados e construirmos um paralelogramo adequado (ver Figuras 20 e 21), a demonstração deste teorema se baseia essencialmente no resultado da Proposição 1.

Prova. Seja ABC um triângulo qualquer e sejam BE e CF bissetrizes dos ângulos $\hat{A}BC$ e $\hat{A}CB$ respectivamente, conforme a figura abaixo.

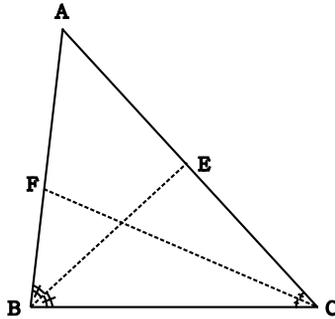


Figura 20: Triângulo ABC e as cevianas BE e CF .

⁷Considere um triângulo ABC de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ opostos aos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , respectivamente. Então vale a relação $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

Suponha, por redução ao absurdo, que $BE = CF$ e $AB \neq AC$, com $AB < AC$. Dessa forma, pela Proposição 1,

$$\widehat{ACB} < \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{\widehat{ACB}}{2} < \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Por conseguinte, utilizando novamente a Proposição 1 e a hipótese $BE = CF$, temos que

$$CE > BF. \tag{1}$$

Agora, considere o paralelogramo $BFG E$, de modo que $EG = BF$ e $GF = BE$.

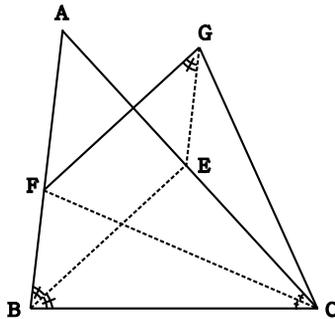


Figura 21: A construção do paralelogramo $BFG E$.

Então, como $BE = CF$, segue-se que $GF = CF$ e, conseqüentemente, $\widehat{FGC} = \widehat{FCG}$. Mas como

$$\widehat{FGE} = \frac{\widehat{ABC}}{2} > \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{FCE},$$

podemos concluir que

$$\widehat{EGC} < \widehat{ECG} \Rightarrow CE < GE = BF,$$

o que contradiz (1). Do mesmo modo a suposição $AB > AC$ também nos conduz a uma contradição. Portanto, $AB = AC$ e o triângulo ABC é isósceles, completando a demonstração.

□

Para demonstrarmos o Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus vamos primeiramente entender o que é um ponto de Gergonne e uma ceviana de Gergonne.

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. E sejam D , E e F pontos sobre os lados a , b e c respectivamente, tais que $AE = AF$, $BF = BD$ e $CD = CE$. É fácil ver que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

Assim, pelo Teorema de Ceva⁸ temos que AD , BE e CF têm um único ponto G de concorrência. Tal ponto denomina-se *ponto de Gergonne*⁹. E as cevianas que passam por G denominam-se *cevianas de Gergonne* (ver Figura 22).

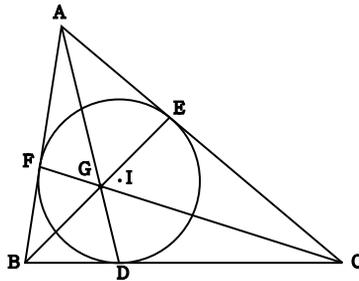


Figura 22: O ponto de Gergonne G e as de cevianas de Gergonne de um triângulo ABC .

⁸Sejam ABC um triângulo e AD , BE e CF cevianas relativas aos lados BC , AB e AC , respectivamente. Então uma condição necessária e suficiente para que estas cevianas tenham um único ponto de concorrência é que $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$.

⁹Este ponto é denominado ponto de Gergonne, em homenagem ao matemático francês Joseph Dias Gergonne (1771-1859)

Observação 1. Note que essas cevianas não coincidem necessariamente com as bissetrizes internas do triângulo ABC . Portanto G não coincide necessariamente com o incentro I do mesmo triângulo.

Observação 2. Pelo fato de D , E e F serem pontos de tangência do triângulo ABC segue-se que $AE = AF = p - a$, $BF = BD = p - b$ e $CD = CE = p - c$, em que $2p = a + b + c$.

Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus. *Se duas cevianas de Gergonne de um triângulo forem iguais, então o triângulo é isósceles.*

Uma idéia razoável para se demonstrar este teorema é supor que as cevianas sejam iguais e que o triângulo não seja isósceles. E a partir de então, construir uma argumentação semelhante àquela usada na demonstração do teorema anterior. Entretanto, utilizaremos um resultado bem conhecido como ferramenta para demonstrar este teorema, que é a Lei dos Cossenos¹⁰, pelo fato de estabelecer uma relação entre um lado do triângulo, seu ângulo oposto e os lados que definem este ângulo.

Prova. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, e sejam BE e CF as cevianas de Gergonne do mesmo triângulo (ver Figura 23).

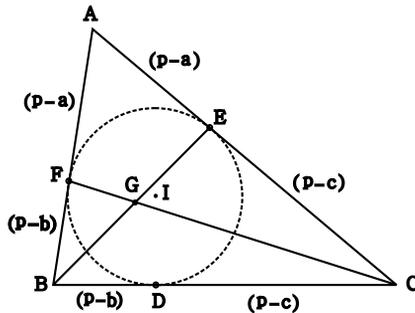


Figura 23: Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus.

¹⁰Em um triângulo qualquer ABC de lados BC , AC e AB que medem respectivamente a , b e c e com ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} valem as relações: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ABE e ACF temos que

$$BE^2 = c^2 + (p - a)^2 - 2c(p - a) \cos \hat{A}$$

e

$$CF^2 = b^2 + (p - a)^2 - 2b(p - a) \cos \hat{A}.$$

Usando a hipótese $BE = CF$ segue-se que

$$\begin{aligned} c^2 + (p - a)^2 - 2c(p - a) \cos \hat{A} &= b^2 + (p - a)^2 - 2b(p - a) \cos \hat{A} \\ \Rightarrow 2(b - c)(p - a) \cos \hat{A} - (b^2 - c^2) &= 0 \\ \Rightarrow (b - c) \left[2(p - a) \cos \hat{A} - (b + c) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Tendo em vista que $2(p - a) = (b + c - a)$ e $\cos \hat{A} = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$, temos que

$$(b - c) \left[(b + c - a) \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right) - (b + c) \right] = 0.$$

Então, agora há dois casos a considerar:

$$i) \quad b - c = 0 \Rightarrow b = c,$$

e neste caso ABC é um triângulo isósceles.

$$\begin{aligned} ii) \quad (b + c - a) \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right) - (b + c) &= 0 \\ \Rightarrow (b + c - a)(b^2 + c^2 - a^2) - 2bc(b + c) &= 0 \\ \Rightarrow b^2(c + a - b) + c^2(b + a - c) + a^2(b + c - a) &= 0, \end{aligned}$$

o que aconteceria somente se os três lados do triângulo fossem nulos (Verifique!). Como, obviamente, não estamos considerando este caso, ii) não pode acontecer. Portanto, o triângulo ABC é isósceles.

□

Teorema (Uma Extensão do Teorema de Steiner-Lehmus). Seja ABC um triângulo. Suponha que as bissetrizes dos ângulos $\angle ACB$ e $\angle ABC$ se encontram com a ceviana de Gergone AD nos pontos E e F , respectivamente. Se $BE = CF$ então o triângulo ABC é isósceles.

Prova. Seja ABC um triângulo qualquer de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e seja AD a ceviana de Gergone relativa ao lado BC (ver Figura 24).

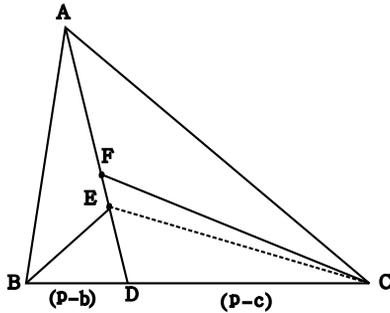


Figura 24: Extensão do Teorema de Steiner-Lehmus.

Suponha que $AB \neq AC$, com $AC > AB$. Então

$$b > c \Rightarrow p - b < p - c.$$

Pela Proposição 1 sabemos que

$$\widehat{ABC} > \widehat{ACB} \Rightarrow \frac{\widehat{ABC}}{2} > \frac{\widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{EBC} > \widehat{FCD} > \widehat{ECB}.$$

Conseqüentemente, como $BE = CF$, segue-se que

$$CE > BE = CF. \tag{2}$$

Sem perda de generalidade, consideremos $\widehat{ADC} = \widehat{EDC} \geq \frac{\pi}{2}$ (o caso $\widehat{EDC} < \frac{\pi}{2}$ é análogo). Logo

$$\widehat{FEC} = \widehat{EDC} + \widehat{ECD} \geq \frac{\pi}{2}$$

e

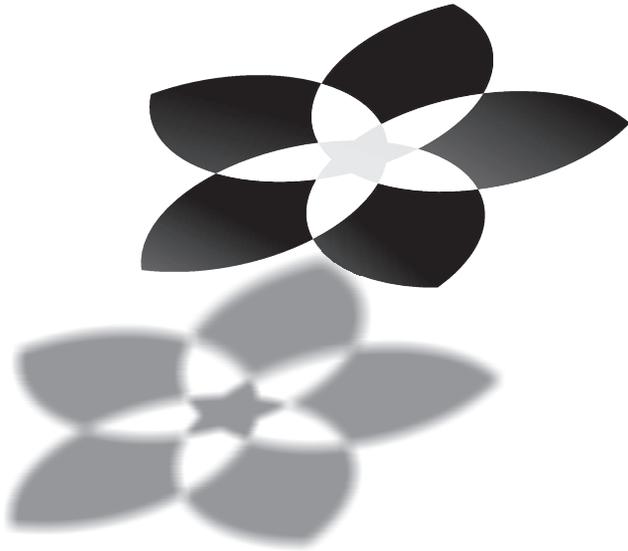
$$\widehat{EFC} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow CE < CF = BE,$$

contradizendo (2). Analogamente, a suposição $AC < AB$ conduz também a uma contradição. Portanto, o triângulo ABC é isosceles, como queríamos mostrar.

□

Referências

- [1] HAJJA. Mowaffaq, *Other Versions of Steiner-Lehmus Theorem*. The American Mathematical Monthly, V. 108 (2001) 760-767.
- [2] HEATH. Thomas L, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol.1, (1956).
- [3] M. Lewin, *On the Steiner-Lehmus theorem*. Math. Mag, v. 47, (1974) 87-89.



Soluções dos Problemas Propostos

1. (Proposto por Eliezer Batista, UFSC) Mostre que, para quaisquer números reais a, b, c e d , tem-se a desigualdade $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

SOLUÇÃO: (apresentada pelo graduando Leandro Augusto Lichtenfelz, UFSC)

Note que se o lado direito desta desigualdade for negativo, não há nada a fazer, porque o lado esquerdo é sempre maior ou igual a zero. Vamos assumir $abcd \geq 0$.

Partindo da desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \forall x, y \geq 0,$$

tome $a', b', c', d' \geq 0$ e escreva: $x = \sqrt{a'b'}$ e $y = \sqrt{c'd'}$. Então:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{a'b'}) (\sqrt{c'd'})} &= \sqrt[4]{a'b'c'd'} \leq \frac{\sqrt{a'b'} + \sqrt{c'd'}}{2} \leq \\ &\leq \frac{\frac{a'+b'}{2} + \frac{c'+d'}{2}}{2} \leq \frac{a' + b' + c' + d'}{4}. \end{aligned}$$

Tome agora

$$\begin{aligned} a' &= a^4 \geq 0 \\ b' &= b^4 \geq 0 \\ c' &= c^4 \geq 0 \\ d' &= d^4 \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4} = \sqrt[4]{(abcd)^4} = abcd \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4}$$

$$\Rightarrow 4abcd \leq a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

2. (Proposto por Eliezer Batista, UFSC) Mostre que a seqüência de números 49, 4489, 444889, ..., onde o próximo termo é constituído a partir do anterior, inserindo-se 48 depois do último algarismo 4, são todos quadrados de números inteiros.

SOLUÇÃO: (apresentada pelo proponente)

Sob uma primeira análise, percebe-se que os primeiros termos da seqüência são quadrados de números inteiros, mais especificamente:

$$\begin{aligned} 49 &= 7^2 \\ 4489 &= (67)^2 \\ 444889 &= (667)^2 \\ 44448889 &= (6667)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

No entanto, isso não garante que todos os termos sejam desta forma.

Verifiquemos, então, que toda a seqüência pode ser escrita como quadrados de números inteiros.

Observe os termos da seqüência:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ termo} &: 49 \\ 2^\circ \text{ termo} &: 4489 \\ 3^\circ \text{ termo} &: 444889 \\ 4^\circ \text{ termo} &: 44448889 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que os termos são da forma $\underbrace{444\dots4}_n \underbrace{88\dots8}_{n-1} 9 = \underbrace{444\dots4}_n \underbrace{88\dots8}_n + 1$

E assim podemos escrever o número $\underbrace{444\dots4}_n \underbrace{88\dots8}_n + 1$ como potências de 10,

ou seja:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{444\dots4}_n \underbrace{888\dots8}_n + 1 = \\
 &= 4 \cdot 10^n (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) + 8(1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) + 1 \\
 &= 4 \cdot 10^n \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + 8 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + 1 \\
 &= \frac{4 \cdot 10^n (10^n - 1) + 4(10^n - 1) + 4(10^n - 1) + (10 - 1)}{9} \\
 &= \frac{4(10^n + 1)(10^n - 1) + 4(10^n - 1) + (10 - 1)}{9} \\
 &= \frac{4(10^{2n} - 1) + 4(10^n - 1) + (10 - 1)}{9} \\
 &= \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 + 4 \cdot 10^n - 4 + 9}{9} \\
 &= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} \\
 &= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2
 \end{aligned}$$

Para que $\left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2$ seja um número inteiro é necessário que $2(10^n) + 1$ seja divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$

Para $n = 0$ temos:

$$2 \cdot 10^0 + 1 = 2 \cdot 10^0 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

Ou seja, para $n = 0$, $\left(\frac{2 \cdot 10^0 + 1}{3} \right)$ é um número inteiro.

Usando indução, admitimos que $\left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)$ é um número inteiro, para algum $n \in \mathbb{N}$.

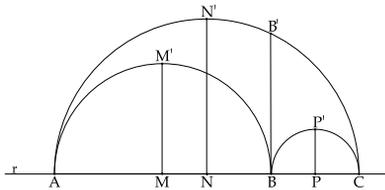
Para $n + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 2(10^{n+1} + 1) &= 2(10^{n+1} - 2 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^n + 1) \\
 &= 2 \cdot 10^n (10 - 1) + 3k, k \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Note que, pela hipótese de indução, $2 \cdot 10^n + 1$ é divisível por 3.

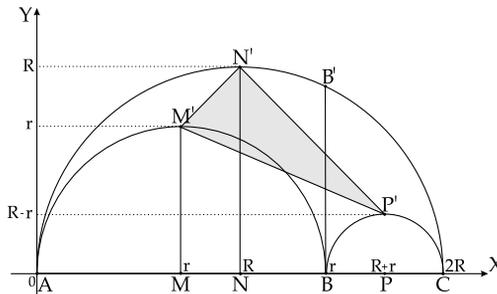
Assim, $2 \cdot 10^n(10 - 1) + 3k = 2 \cdot 9 \cdot 10^n + 3k = 3(2 \cdot 3 \cdot 10^n + k) = 3l, l \in \mathbb{N}$.
 Portanto, todos os termos da seqüência são quadrados de números inteiros.

3. (Proposto por Paulo Ricardo Boff, graduando UFSC) A figura abaixo, representa três semi-circunferências de centros M, N e P , tangentes duas a duas respectivamente, nos pontos A, B e C . Os segmentos MM', NN', BB' e PP' são perpendiculares à reta r . Se a medida do segmento BB' é igual a S unidades de comprimento, qual é área do triângulo $\Delta M'N'P'$ em função de S ?



SOLUÇÃO: (apresentada pelo estudante André Ginklings Fróes da Cruz, CE-FET - Florianópolis/SC)

Seja A a origem do plano cartesiano com \overline{AC} sobre o eixo X . Considere $\overline{AM} = r, \overline{AN} = R$ e $\overline{BB'} = S$. Então temos os pontos:
 $A(0, 0); M(r, 0); B(2r, 0); P(R+r, 0); C(2r, 0); N(R, 0); M'(r, r); N'(R, R'); B'(2R, S); P'(R+r, R-r)$.



Sabe-se que dados três pontos não colineares $X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2)$ e $Z(x_3, y_3)$, a área do triângulo ΔXYZ é dada por:

$$A_{\Delta XYZ} = \frac{|D|}{2}, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Então a área do triângulo $\triangle M'N'P'$ é:

$$A_{\triangle M'N'P'} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} r & r & 1 \\ R & R & 1 \\ (R-r) & (R+r) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2Rr - 2r^2|. \quad (1)$$

Mas sabemos também que a equação da circunferência de raio R e centro $N(R, 0)$ é dada por:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2. \quad (2)$$

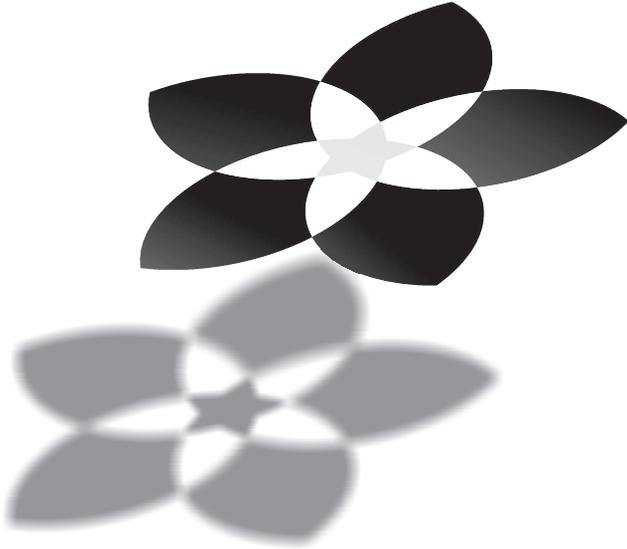
Substituindo o ponto $B'(2r, S)$ em (2), temos

$$\begin{aligned} (2r - R)^2 + S^2 &= R^2 \Rightarrow 4r^2 - 4Rr + R^2 + S^2 = R^2 \Rightarrow \\ S^2 &= 4Rr - 4r^2 \Rightarrow \frac{S^2}{2} = 2Rr - 2r^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Por fim, substituindo (3) em (1), obtemos:

$$A_{\triangle M'N'P'} = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{S^2}{2} \right| \right) = \frac{1}{2} \frac{S^2}{2} = \frac{S^2}{4},$$

que é a área procurada.

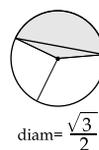
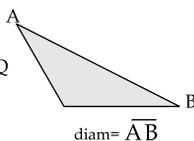
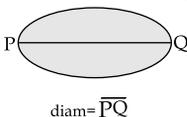
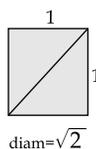


Problemas Propostos

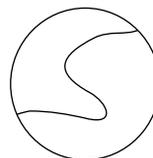
Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja “Informações Gerais”).

1. (Proposto pelo professor Antônio Vladimir Martins, UFSC)

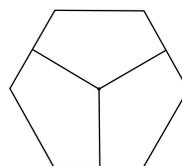
O diâmetro de um conjunto (de reta, do plano, \mathbb{R}^3 , \dots , \mathbb{R}^n , \dots) é a distância máxima entre quaisquer dois dos seus pontos. Exemplos:



- a) Mostre que qualquer curva que divide a região circular de diâmetro igual a 1 u.c. (u.c. significa “unidade de comprimento”) em duas partes, uma das partes tem diâmetro igual a 1 u.c.



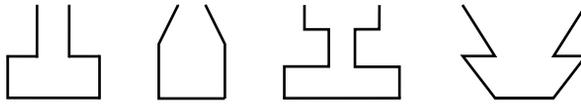
- b) Se a distância entre os lados opostos de um hexágono regular é 1 u.c., achar a medida do lado do exágono.
- c) Mostre que cada uma das três partes da divisão de um hexágono regular cuja distância entre os lados opostos é 1 u.c., conforme o modelo abaixo, tem diâmetro menor do que 1 u.c.



- d) Prove que não é possível cortar um quadrado de lado com medida 1 u.c. em três partes, tendo cada uma diâmetro menor do que 1 u.c.
- e) Como cortar a esfera de diâmetro igual a 1 u.c. em quatro partes, tendo cada uma diâmetro menor do que 1 u.c.?

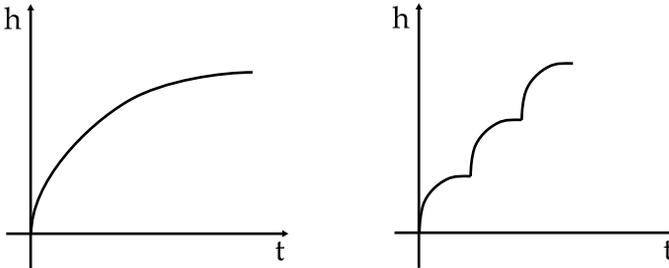
2. (Proposto pelo professor Antônio Vladimir Martins, UFSC)

- a) Na figura abaixo tem-se quatro recipientes:



Em cada recipiente fazemos despejar água à razão de 1 copo por segundo. Esboçar gráficos da altura h da água em função do tempo t .

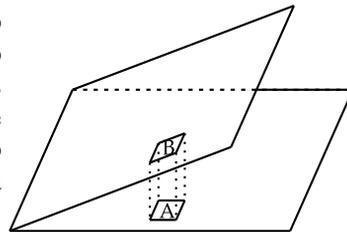
b) Analisar o seguinte problema inverso:



Para cada um dos gráficos, esboçar uma figura possível para o recipiente que resultou neste gráfico.

3. (Proposto pelo professor Antônio Vladimir Martins, UFSC)

Na figura os planos formam um ângulo agudo α . B é retângulo, A é quadrado e este quadrilátero tem um par de lados paralelos à reta comum aos planos. Se o quadrado A é a projeção ortogonal do retângulo B , achar uma relação entre a área de A e a área de B .



4. (Proposto pelo graduando Edson Luiz Valmorbidia, UFSC)

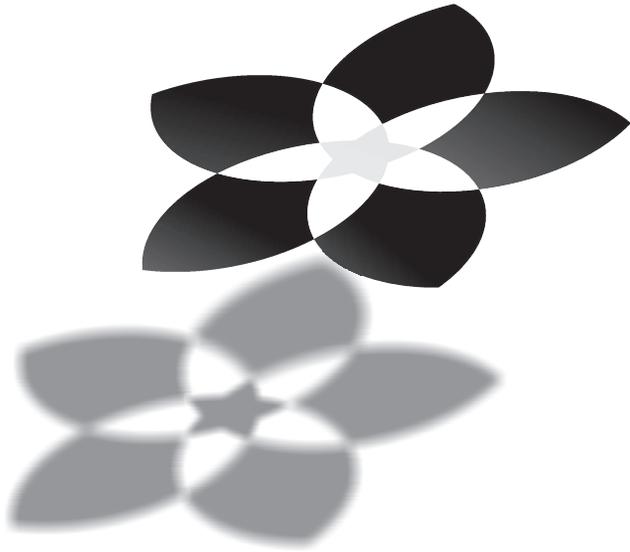
A série harmônica é definida como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sabe-se que esta é uma série di-

vergente (verifique!), ou seja, não existe número real M tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq M$.

Mostre que se retirarmos todas as frações que possuem o algarismo 9 então a série torna-se convergente.

5. (Proposto pelo graduando Paulo Ricardo Boff, UFSC)

Mostre que $\pi = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} \right)^2$.



Outras Olimpíadas

Resultados de premiados da ORM em outras olimpíadas

Renan Henrique Finder (Joinville): medalha de ouro na Olimpíada Regional de Matemática (nível 2)

- Medalha de bronze na Olimpíada de Maio em 2006 (nível 2)
- Medalha de ouro na Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (nível 2)
- Medalha de ouro na Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2007

Gustavo Lisboa Empinotti (Florianópolis): medalha de ouro na Olimpíada Regional de Matemática (nível 2)

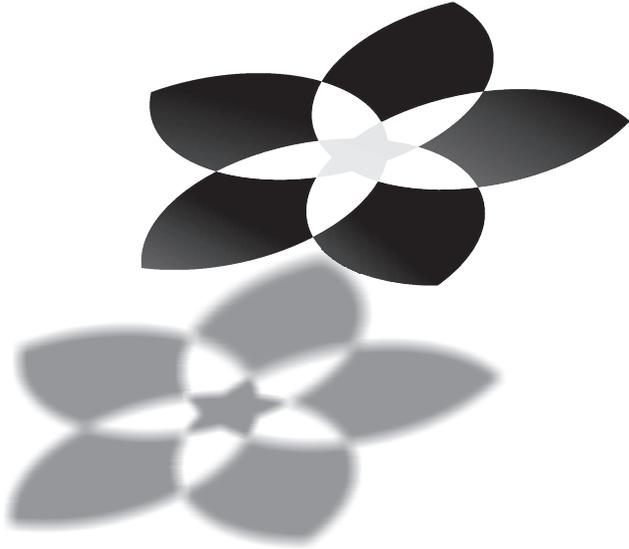
- Medalha de prata na Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (nível 2)
- Menção honrosa na Olimpíada de Maio em 2007 (nível 2)

Leonardo Gonçalves Fischer (Fraiburgo): medalha de prata na Olimpíada Regional de Matemática (nível 2)

- Menção honrosa na Olimpíada de Maio em 2006 (nível 2)

Natan Cardozo Leal (São Bento do Sul): menção honrosa na Olimpíada Regional de Matemática (nível 2)

- Medalha de ouro na Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas



Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o \LaTeX , então o artigo poderá ser submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. Existe um período em cada ano para cadastramento na OBM. Escolas cadastradas nos anos anteriores permanecem cadastradas na OBM nos anos subseqüentes, exceto se for feita uma chamada para recadastramento. Já para a ORM é preciso fazer um recadastramento todo ano, havendo também para isso um período em cada ano (ver a nossa página).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberam a revista podem nos solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Erramos

Na Revista nº4, devem ser observadas as seguintes alterações:

- Página 05: O título correto do segundo artigo é “O Teorema de Menelau, um Exemplo de Aplicação de Áreas em Problemas Geométricos”.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

- Nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
- Telefone/Fax: (48) 37216809 (PET - Matemática)
- e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
- Endereço: PET - Matemática

Departamento de Matemática - CFM
UFSC
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC