Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

Nº12, 2015

Apoio:

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina/ Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n], 2004 -
v.: 12 (2015) 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas, Exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.

Editoração Eletrônica:
Alda Dayana Mattos
Daniella Losso da Costa
Miguel Bauschat
Rodrigo Maciel Rosa
Sidinei Lindomar da Rocha Junior

Tiragem:
1500 exemplares

Arte da Capa:
Rafaela Goulart de Andrade
Renata Leandro Becker

Postagem:
Segundo semestre de 2014.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina Nº12, 2015

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação

A *Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina* é o resultado de um projeto de extensão da UFSC e uma atividade de extensão do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática (SESu/MEC) da UFSC, com a ativa participação de alunos bolsistas de extensão do programa PROBOLSAS, da Pró-Reitoria de Extensão (PROEX) e de alunos voluntários. Participam ainda do projeto nove professores do Departamento de Matemática da UFSC. O 12° número da Revista foi financiado com recursos da Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, como um auxílio financeiro para evento da OBM. A Revista é um projeto independente de outro projeto de extensão da UFSC, a *Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (ORM)* ligado ao projeto *Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática / Olimpíada Brasileira de Matemática* (MCTI/CNPq/MEC/CAPES/FNDE).

O principal objetivo da Revista é divulgar a ORM em todo o estado de Santa Catarina através de sua distribuição gratuita a cerca de 1000 escolas públicas e particulares, às Secretarias de Educação de todos os municípios do estado e a todas as Gerências de Educação do estado. Além disso, a Revista é enviada a cerca de 60 IES públicas através do programa de divulgação da Biblioteca Universitária da UFSC.

A Revista, a partir deste número, passará a divulgar ainda a Olimpíada Regional Mirim de Matemática (ORMM), outro projeto de extensão da UFSC e também uma atividade de extensão do PET Matemática, que está direcionada para os alunos do 5° ano do ensino fundamental de algumas escolas de Florianópolis.

Como sempre, encorajamos todos os leitores a enviar problemas para a seção "Problemas propostos" e soluções dos problemas daquela seção propostos em números anteriores. Artigos serão bem recebidos e publicados desde que sejam aprovados pelo Comitê Editorial da Revista.

Florianópolis, 29 de novembro de 2014.

José Luiz Rosas Pinho

Tutor do PET Matemática da UFSC

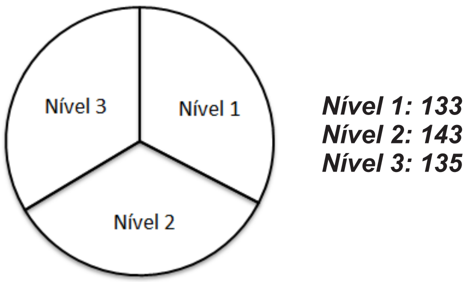
Coordenador da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

XVI ORM (2013)

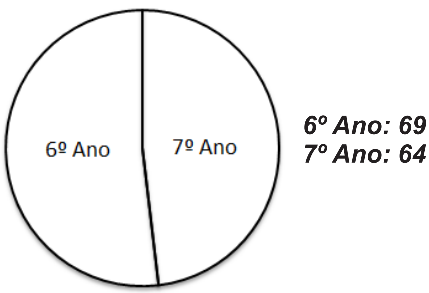
XVI ORM em Números

Na primeira fase da XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina participaram 7.823 alunos de ensino fundamental e médio, oriundos de 181 escolas públicas e particulares de 60 municípios do estado. Deste total, foram classificados 802 alunos para a segunda fase, dos quais 408 compareceram para realizar a prova, cujas distribuições por níveis e anos são mostradas abaixo.

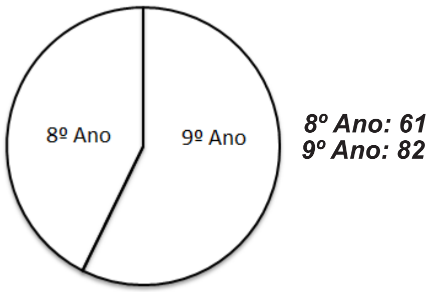
Total de alunos participantes da segunda fase, separados por níveis



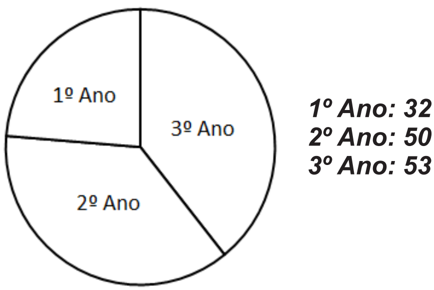
Nível 1



Nível 2



Nível 3



Premiados

A Cerimônia de Premiação da XVI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina ocorreu no dia 30 de novembro de 2013, no Centro de Cultura e Eventos da Universidade Federal de Santa Catarina e contou com a presença das seguintes autoridades: Maristela Helena Zimmer Bortolini, Pró-Reitora Adjunta de Extensão (PROEX), representando a Reitora Roselane Neckel, Silvia Martini de Holanda Janesch, Coordenadora do Curso de Matemática, Licio Hernanes Bezerra, Vice-Diretor do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Carmem Suzane Comitre Gimenez e José Luiz Rosas Pinho, professores do Departamento de Matemática responsáveis pela olimpíada.

Na cerimônia, foram premiados 41 estudantes (o que corresponde, aproximadamente, a 10% dos alunos que participaram da segunda fase): 4 com medalhas de ouro, 3 com medalhas de prata, 7 com medalhas de bronze e 27 com menções honrosas.

Prêmio William Glenn Whitley[1]

- Matheus Marcucci (Florianópolis)

Nível 1

Ouro

- Matheus Klement Sebben (Maravilha)
- Matheus Marcucci (Florianópolis)

Prata

- Ana Luiza Coelho Demetrio (Florianópolis

Bronze

- Alexandra Luiza Satoretto Matte (Florianópolis)
- Nicolle de Oliveira Schmitt (Florianópolis)

[1] O prêmio é destinado ao aluno com a maior pontuação na Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. Esta é uma homenagem ao professor William Glenn Whitley (ver revista da ORM nº 4) e começou a ser entregue no ano de 2006.

- Pedro Luan Polignano Motta Dias (Florianópolis)
- Raquel Zoz Bieger (Florianópolis)

Menção Honrosa

- Artur Lucio dos Santos (Joinville)
- Caio Fábio Furquim Werneck Leite (Florianópolis)
- Carolina Nau França Vale (Florianópolis)
- Felipe Jeremias Durão (Florianópolis)
- João Gabriel Telles Miranda (Maravilha)
- Julia Cavaler Vitali (Criciúma)
- Lucas Eduardo Schlenert de Oliveira (Joinville)
- Maria Vitória de Lima Dutra (Florianópolis)
- Mariane Snheszak (Porto União)
- Milena Michailoff Comarella(Florianópolis)

Nível 2

Ouro

- Eduardo Lennert Rammé (Joinville)

Prata

- Rafael Della Giustina Basilone Leite (Florianópolis)

Bronze

- Gabriel Pereira do Nascimento (Florianópolis)
- Pedro Oliveira Gonzaga (Florianópolis)

Menção Honrosa

- Anísio de Souza Neto (Itajaí)
- Daniel Gustavo Schlindwein da Silva (Itajaí)
- Eduardo Kopik (Florianópolis)
- Isabela Warmling Bezerra (Palhoça)
- Letícia Weiller (Porto União)
- Lucas Trindade Betega (Florianópolis)
- Mateus Israel Silva (Florianópolis)
- Matheus Monteiro Shoji (Joinville)

Nível 3

Ouro

- Fernando Luiz Alves Lapa (Joinville)

Prata

- João Marcos Carnieletto Nicolodi (Florianópolis)

Bronze

- Gabriella Maria Radke Chaves (Joinville)

Menção Honrosa

- Airton José Schmitt Junior (Florianópolis)
- Amadeo Zimermann (Florianópolis)
- Antonio Jerônimo Botelho (Tubarão)
- Cristine Buettgen (Blumenau)
- Davi Gustavo Lisboa Girardi (Florianópolis)
- Mateus Spezia (Itajaí)

- Mikhail Zimmer Heidrich (Lages)
- Murilo Martini (Blumenau)
- Nicolly Longo (Joinville)

Escolas Participantes

Associação Educacional Luterana - Bom Jesus (Joinville); **C**entro de Educação Nossa Senhora da Conceição (Ingleses do Rio Vermelho); **C**entro de Educação Oficina dos Sonhos (Joinville); **C**entro Educacional Barreiros (Barreiros): **C**entro Educacional Caminho do Saber (Rio Negrinho); **C**entro Educacional Céu Azul (Porto União); **C**entro Educacional Conexão (Joinville); **C**entro Educacional Criativo (Florianópolis); **C**entro Educacional Estimoarte (Florianópolis); **C**entro Educacional Fraiburgo (Fraiburgo); **C**entro Educacional Machado de Assis (Joinville); **C**entro Educacional Menino Jesus (Florianópolis); **C**entro Educacional Paraíso Infantil (Florianópolis); **C**entro Educacional Pedro dos Santos Rio do Sul; **C**entro Educacional Promissor (Palhoça); **C**entro Educacional Roberto Machado (Rio do Sul); **C**entro Educacional Roda Pião (Palhoça); **C**entro Educacional Sistema Unificado (Itajaí); **C**entro Educacional Universo (Florianópolis); **C**etisa (Timbó); **C**olégio Agrícola de Camboriú (Camboriú); **C**olégio Antônio Peixoto (Florianópolis); **C**olégio Auxiliadora (Campos Novos); **C**olégio Bom Jesus Coração de Jesus (Florianópolis); **C**olégio Bom Jesus Divina Providência (Jaraguá do Sul); **C**Colégio Bom Jesus Santo Antônio (Blumenau); **C**olégio Catarinense (Florianópolis); **C**olégio Carlos Drumond de Andrade (Fraiburgo); **C**olégio Cenecista José Elias Moreira (Joinville); **C**olégio Cenecista Marcos Olsen (Caçador); **C**olégio Cenecista Pedro Antônio Fayal (Itajaí); **C**olégio Cenecista São José (Rio Negrinho); **C**olégio Conhecer (Balneário Camboriú); **C**olégio Cristo Rei (Içara); **C**olégio da Lagoa (Florianópolis); **C**olégio de Aplicação da UNESC (Criciúma); **C**olégio de Aplicação da Univali (Itajaí); **C**olégio de Aplicação UFSC (Florianópolis); **C**olégio Dehon (Tubarão); **C**olégio Dom Bosco (Rio do Sul); **C**olégio Dom Jaime Camara (São José); **C**olégio dos Santos Anjos (Joinville); **C**olégio Educar (Biguaçu); **C**olégio Elisa Andreoli (Florianópolis); **C**olégio Energia (Florianópolis); **C**olégio Evolução (São Ludgero); **C**olégio Geração (Floranópolis); **C**olégio Global (São Bento do Sul); **C**olégio Incentivo (Biguaçu); **C**olégio Jardim Anchieta (Florianópolis); **C**olégio Luterano Santíssima Trindade (Catanduvas); **C**olégio Madre Francisca Lampel (Gaspar); **C**olégio Marista (Criciúma); **C**olégio Maximiliano Gaidzinski (Cocal do Sul); **C**olégio Mons Agenor Neves Marques (Urussanga); **C**olégio Nova Era (Joinville); **C**olégio Nossa Senhora de Fátima (Florianópolis); **C**olégio Reino Azul (São José); **C**olégio Rogacionista Pio XII (Criciúma); **C**olégio Sagrada Família (Blumenau); **C**olégio Sagrada Família (Forquilhinha); **C**olégio Sagrada Família (Itapiranga); **C**olégio Salesiano Itajaí (Itajaí); **C**olégio Santa Rosa de Lima (Lages); **C**olégio Santíssima Trindade (Joaçaba); **C**olégio Santo Antônio (Joinville); **C**olégio São José (Porto União); **C**olégio São José (Tubarão); **C**olégio São Luiz (Brusque); **C**olégio Sinodal Doutor Blumenau (Pomerode); **C**olégio Sinodal Ruy Barbosa (Rio do Sul); **C**olégio Santa Catarina (Florianópolis); **C**olégio Stella Maris (Laguna); **C**olégio Superação (Videira); **C**olégio Superativo (Joaçaba); **C**olégio Tendência (Florianópolis); **C**olégio Tradição (Florianópolis); **C**olégio Tupy (Joinville); **C**olégio Universitário(Gaspar); **C**olégio Univille (Joinville); **C**olégio Villa Olímpia (Florianópolis); **C**olégio Visão (São José); **C**ooperativa Educacional de Imbituba (Imbituba); **C**urso e Colégio Perfil (Garapaba); **E**B Aricomedes da Silva (Florianópolis); **E**BM Alto Rio da Anta (Santa Terezinha); **E**BM Almirante Tamandaré (Blumenau); **E**EB Altamiro Guimarães (Antônio Carlos); **E**BM Bairro Bortolotto (Nova Veneza); **E**BM Dr. Franklin de Oliveira (São Francisco do Sul); **E**BM José Maria (Abelardo Luz); **E**BM Juvenil da Cunha Colares (Sombrio); **E**BM Luiz Candido da Luz (Florianópolis); **E**BM Luiz Francisco Vieira (Itapema); **E**BM Martinho Stein (Timbó); **E**BM Oswaldo dos Reis (Itapema); **E**BM Professor Ernesto Sirino (Abelardo Luz) **E**BM Professor Hildo Goulart (Abelardo Luz); **E**BM Professora Hella Altenburg (Blumenau); **E**B Pedro Paulo Rebello (Itajaí); **E**B Tempo Feliz (Canoinhas); **E**ducandário Imaculada Conceição (Florianópolis); **E**scola Educacional Técnica (Criciúma); **E**EB André de Souza (Imbituba); **E**EB Bela Vista (São José); **E**EB Bertoldo Zimmermann (Tubarão); **E**EB Conselheiro Mafra (Joinville); **E**EB Coronel Pedro Christiano Feddersen (Blumenau); **E**EB Conselheiro Manoel Philippi (Águas Mornas); **E**EB Domingos Barbosa Cabral (Laguna); **E**EB Francisco Tolentino (São José); **E**EB Ignácio Stakowski (Içara); **E**EB

Irmã Edviges (Criciúma); **E**EB João Frassetto (Criciúma); **E**EB José Bonifácio (Pomerode); **E**EB José Botega (Tubarão); **E**EB Manoel Estevao Furtado (Papanduva); **E**EB Natalio Vassoler (Forquilinha); **E**EB Padre Vendelino Seidel (Iporã do Oeste); **E**EB Presidente Médici (Joinville); **E**EB Professor Curt Brandes (Pomerode); **E**EB Professor Tomé Machado Vieira (Tubarão); **E**EB Professora Emerita Duarte e Souza (Biguaçu); **E**EB Professora Maria da Gloria Silva (Içara); **E**EB Professora Marta Tavares (Rio Negrinho); **E**BM Professora Noemi Viera de Schroeder (Pomerode); **E**EB Professora Otília da SIlva Berti (Araranguá); **E**EB São Bento (São Bento do Sul); **E**EB São João Batista de La Salle (Concórdia); **E**EB Solon Rosa (Curitibanos); **E**EB Werner Knabben (Braço do Norte); **E**EB Willy Hering (Rio do Sul); **E**EF João Café Filho (Anchieta); **E**EF Luiz Ledra (Rio do Sul); **E**EF Padre Reinaldo Stein (Anchieta); **E**EF Orides Rovani (Ipumirim); **E**EF Tancredo de Almeida Neves (Garuva); **E**EF Thomaz Padilha (Caçador); **E**MEEB Henrique Júlio Berger (Caçador); **E**MEF Anna Towe Nagel (Jaraguá do Sul); **E**MEF Educar (Itapema); **E**MEF Prefeito Francisco Victor Alves (Itapema); **E**R Maria Linhares de Souza (Itapema); **E**scola Barão do Rio Branco (Blumenau); **E**scola de Educação Básica da Unidavi (Rio do Sul); **E**scola Municipal de Ensino Fundamental Frei Valentim (Itapoá); **E**scola Municipal Governador Pedro Ivo Campos (Joinville); **E**scola Municipal Irmã Filomena Rabelo (Treze Tílias); **E**scola Municipal Joaquim Vicente de Oliveira (Itapema); **E**scola Municipal Professora Karin Barkemeyer (Joinville); **E**scola Municipal Viver e Conhecer (Capinzal); **E**scola Técnica do Vale do Itajaí (Blumenau); **E**scola Autonomia (Florianópolis); **E**scola A Nova Dimensão (Florianópolis); **E**scola da Ilha (Florianópolis); **E**scola Dinâmica (Florianópolis); **E**scola Sarapiquá (Florianópolis); **E**TC de Tubarão (Tubarão); **E**xathum Curso e Colégio (Joinville); **I**nstituto Educacional Madre Elisa Savoldi (Sombrio); **I**nstituto Federal de Educação de Santa Catarina (Florianópolis); **I**nstituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense (Concórdia); **I**nstituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense (Joinville); **I**nstituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense (Videira); **I**nstituto Maria Auxiliadora

(Rio do Sul); **K**umon Joaçaba (Joaçaba); **K**umon Criciúma - Joaquim Nabuco (Criciúma); **K**umon Florianópolis (Florianópolis); **S**enai (Jaraguá do Sul); **S**enai (Joinville); **S**enai (Lages); **S**enai (São José); **S**enai (São Miguel D'Oeste); **S**enai (Tijucas); **S**ociedade Eucacional Posiville (Joinville); **S**ociedade Educacional Verdes Mares (Itajaí); **S**ociedade Educacional de Palhoça - FATENP (Palhoça).

Provas e Gabaritos

Prova Nível 1

1. Na Figura 1 abaixo, há 5 triângulos: 4 menores e um maior. Determine:
   (a) Quantos triângulos de mesma área do maior triângulo da Figura 1 existem na Figura 2;
   (b) Quantos triângulos de todos os tamanhos há na Figura 2.

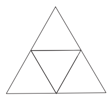


Figura 1

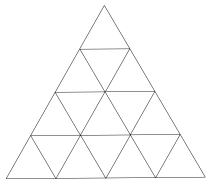


Figura 2

2. No planeta *Netúpiter*, cada ano possui cinco meses: *uneiro*, *dueiro*, *trieiro*, *quatreiro* e *cinqueiro*. Cada mês possui 41 dias e cada semana possui 11 dias. Se hoje é dia 12 de *uneiro*, qual o próximo mês em que o dia 12 cairá no mesmo dia da semana de hoje?

3. Encontre um número primo de três algarismos abc (a, b e c são algarismos e não precisam ser diferentes entre si) de modo que a, b e c sejam números primos e que os números de dois algarismos ab e bc também sejam números primos.

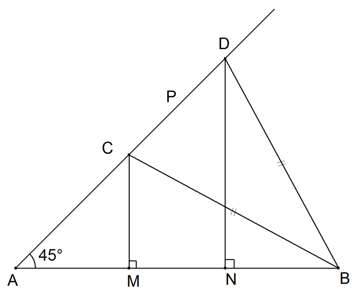
4. Completar o quadrado abaixo com números inteiros positivos de maneira que o resultado da multiplicação dos números de cada linha, coluna e diagonal do quadrado seja o mesmo.

	15	

5. Todo casal de pássaros da espécie *bong* tem sua primeira ninhada, que é formada por dois casais de *bongs*, no terceiro mês de idade. Depois da primeira ninhada, cada casal gera dois casais de *bongs* a cada mês. Sabendo que, no mês de janeiro, Joãozinho possuía um casal de *bongs* com dois meses de idade, quantos casais de *bongs* Joãozinho terá no final de julho?

Prova Nível 2

1. Na figura abaixo, $\hat{A} = 45°$, $BC = BD$, e os segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{DN}$ são perpendiculares a $\overline{AB}$. Mostre que $AM = BN$.



2. Um trem encontra a linha bloqueada por um acidente, uma hora após sua partida, o que o detém por meia hora. Depois disso, ele parte viajando a três quartos da velocidade anterior e chega ao seu destino com três horas e meia de atraso. Se o acidente tivesse ocorrido $90km$ mais adiante, o atraso seria de apenas três horas. Qual é o comprimento do trajeto que o trem percorre?

3. Joãozinho escreve o algarismo 1 em um papel, joga um dado e, segundo o número do dado, escreve a mesma quantidade de zeros após o algarismo 1 já escrito. Em seguida, escreve outro 1, joga novamente o dado e novamente escreve o número de zeros. Por fim, escreve outro 1. Por exemplo, se o resultado das jogadas é 2 e 5, então o número escrito é 1001000001. Mostre que a soma de todos os possíveis números obtidos dessa forma é múltipla de 36.

4. Pedrinho possui muitas bolinhas de diversas cores. Pedrinho deve montar grupos com três bolinhas de acordo com as seguintes regras:
   (i) Há pelo menos um grupo e, em todo grupo, as três bolinhas têm cores diferentes.

   (ii) Para qualquer cor de bolinha presente em algum grupo, existe um outro grupo que não contém bolinhas dessa cor.

(iii) Para cada duas cores de bolinhas dentre todas as cores utilizadas nos grupos, existe um único grupo que contém bolinhas dessas duas cores.

Qual é o número mínimo de cores necessário para Pedrinho montar os grupos?

5. Determine o número de conjuntos não vazios A satisfazendo:
(i) A é subconjunto de $\{1, 2, 3, ..., 2013\}$;

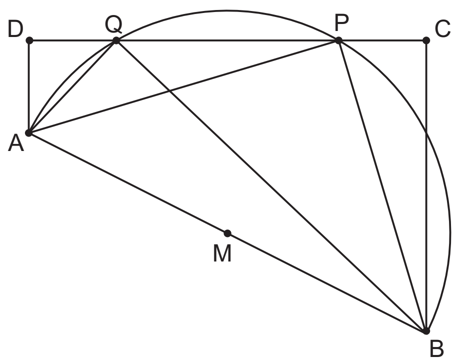
(ii) se $n \in A$ e $2n < 2013$, então $2n \in A$;

(iii) se $n \in A$ e n é par, então $\frac{n}{2} \in A$.

Prova Nível 3

1. Joãozinho escreve o algarismo 1 em um papel, joga um dado e, segundo o número do dado, escreve a mesma quantidade de zeros após o algarismo 1 já escrito. Em seguida, escreve outro 1, joga novamente o dado e novamente escreve o número de zeros. Por fim, escreve outro 1. Por exemplo, se o resultado das jogadas é 2 e 5, então o número escrito é 1001000001. Mostre que a soma de todos os possíveis números obtidos dessa forma é múltipla de 36.

2. Seja $ABCD$ um trapézio retângulo com $\hat{C} = \hat{D} = 90°$. A circunferência com centro no ponto médio M de $\overline{AB}$ e passando por A intersecta $\overline{CD}$ nos pontos Q e P, conforme figura abaixo. Mostre que a soma das áreas dos triângulos ABQ e ABP é igual à área do trapézio $ABCD$.



3. Em um período de 12 horas, quantas vezes podemos inverter as posições dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio de modo que a nova configuração represente uma hora consistente? Por exemplo, na hora 2:30, não podemos inverter a posição dos ponteiros, pois ao colocar o ponteiro das horas no 6, necessariamente o ponteiro dos minutos deveria estar no 12, e não entre 2 e 3.

4. Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ uma função que satisfaz $f\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{1}{f(n)}$, para qualquer $n \in \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

   a) Mostre que $f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   b) Considere a sequência de Fibonacci: $F_1 = 1, F_2 = 2$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 1$.

   Mostre que se $f(1) = 2$, então $\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(1) = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

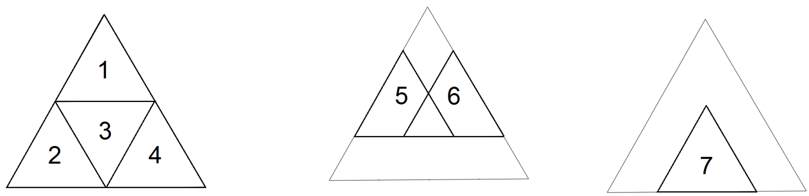
5. Mostre que, para todo $n \geq 2$,

$$\underbrace{2013^{2013^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}}}}_{n \text{ vezes}} - 1$$

   é múltiplo de 7.

Gabarito Nível 1

1. (a) Há 7 triângulos de mesma área do maior triângulo da fig. 1

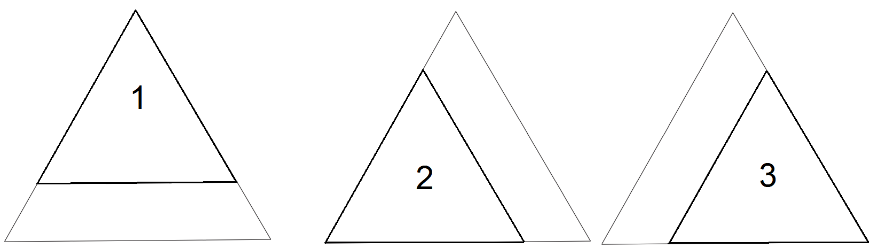


   (b) "Tamanho 1"(triângulos menores da fig. 1) : 16

   "Tamanho 2": 7 (acima)

   "Tamanho 3": 3

   "Tamanho 4": 1



   No total são 27 triângulos de todos os tamanhos.

2. Como cada mês possui 41=33+8 dias, ou seja 3 semanas mais 8 dias, se no dia 12 de uneiro for um certo dia da semana, o dia 12 de dueiro será aquele dia da semana mais 8 (Ex.: se A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K forem os dias da semana, e se 12 de uneiro for o dia C, então 12 de dueiro cairá no dia K

da semana). Assim, para que o dia 12 caia no mesmo dia da semana de 12 de uneiro é necessário que passe uma quantidade de dias (ou de meses) de modo que a soma dos "restos"[8] seja igual a um múltiplo de 11, ou seja, após 11 meses. Portanto, em dueiro (passados dois anos e um mês) o dia 12 cairá no mesmo dia da semana que o dia 12 de uneiro (data "atual").

Outra solução: Para que o dia 12 caia novamente no mesmo dia da semana de 12 de uneiro é necessário que passe uma quantidade de dias que seja múltipla de 11 e de 41, ou seja, que passem de início, 41×11 dias. Mas isso ocorrerá após se passarem 11 meses, ou seja, após 2 anos e um mês, em 12 de dueiro.

3. Como a, b e c devem ser primos, então eles só podem ser 2, 3, 5 e 7. Como ab e bc são primos, então b e c não podem ser 2 ou 5. Portanto abc deve ser do tipo $a33$, $a37$, $a73$ ou $a77$. Como 33 e 77 não são primos, então abc é da forma $a37$ ou $a73$.
Agora, a não pode ser 2 nem 5 pois, caso contrário, abc seria múltiplo de 3 (já que $2+3+7=12$ e $5+3+7=15$). Então $a=3$ ou $a=7$. Como ab é primo, abc não pode ser 337 nem 773. Restam então as seguintes possibilidades para abc: 373 e 737. O número 737 é múltiplo de 11 ($737 = 11 \cdot 67$). O número 373 é primo (basta testar os divisores primos até 19).

Resposta: 373.

4. Há uma solução trivial, repetindo-se os números: colocar 15 em todas as casas. Sem repetir os números, suponhamos que coloquemos 1 em uma casa lateral (que não está no canto) e completamos a linha (ou coluna) com 15^2. Então o produto será igual a $1 \times 15 \times 15^2 = 3^3 \cdot 5^3$. Mas então, na coluna (ou linha) em que aparece $225 = 15^2$, devemos ter 3 em uma casa e 5 na outra:

		3
1	15	225
		5

Agora é fácil completar as outras casas:

45	25	3
1	15	225
75	9	5

5. Vamos colocar os resultados em uma tabela:

Meses do ano \ Meses de idade	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Jan			1							1
Fev	2			1						3
Mar	2	2			1					5
Abr	2	2	2			1				7
Maio	2 2 x 2	2	2	2			1			13
Junho	2 2 x 2 2 x 2	2 2 x 2	2	2	2			1		23
Julho	2 2 x 2 2 x 2 2 x 2	2 2 x 2 2 x 2	2 2 x 2	2	2	2			1	37

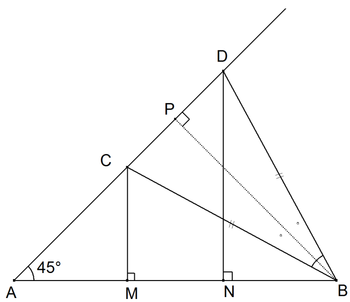
Resposta: No final de julho Joãozinho terá 37 casais de bongs.

Gabarito Nível 2

1. Seja $\overline{BP} \perp \overline{CD}$, com P em $\overline{CD}$.

   Como o $\triangle BCD$ é isosceles, então $\overline{BP}$ é a bissetriz do ângulo $C\widehat{B}D$ do triângulo. Sejam $C\hat{B}P = D\hat{B}P = \alpha$

   Além disso, como $\widehat{A} = 45°$, $A\widehat{B}P = 45°$.



   Então $A\widehat{B}C = A\widehat{B}P - \alpha = 45° - \alpha$ e $A\widehat{B}D = A\widehat{B}P + \alpha = 45° + \alpha$.

   Assim, os ângulos $M\widehat{B}C$ e $N\widehat{B}D$, respectivamente dos $\triangle MBC$ e $\triangle NBD$ (retângulos), satisfazem:

$$M\widehat{B}C + N\widehat{B}D = A\widehat{B}C + A\widehat{B}D = 45° - \alpha + 45° + \alpha = 90°.$$

   Logo, os dois triângulos são congruentes, pois suas hipotenusas $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes. Portanto, $MC = NB$. Mas $MC = AM$, logo $AM = NB$.

2. Sejam V a velocidade normal do trem, x a distância que o trem deverá percorrer após a parada, e H a quantidade de horas que seriam transcorridas para o trem percorrer a distância x com a velocidade V. Então,

$$V = \frac{x}{H} \text{ (1).}$$

Como o trem, ao percorrer a distância x com uma velocidade de $\frac{3}{4}V$, se atrasa 3 horas e meia, então com esta velocidade ele faz o percurso x em $H + 3$ horas $\left(\text{durante } \frac{1}{2} \text{ hora ficou parado}\right)$. Assim:

$$\frac{3}{4}V = \frac{x}{H+3} \text{ (2).}$$

De (1) e (2), obtemos:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{H} = \frac{x}{H+3} \Longrightarrow 4H = 3H + 9 \Longrightarrow H = 9\text{horas.}$$

Assim, o trem percorrerá a distância de x km em $9 + 3 = 12$ horas. Portanto,

$$\frac{3}{4}V = \frac{x}{12}, \text{ ou, } V = \frac{x}{9}.$$

Agora, se o acidente tivesse ocorrido 90km mais adiante, então o trem percorrerá, à velocidade $\frac{3}{4}V$, uma distância $x - 90$km em $H - \frac{90}{V} + 2 + \frac{1}{2}$ horas = $11,5 - \frac{90}{V}$ horas. Portanto,

$$\frac{3}{4}V = \frac{x-90}{11,5 - \frac{90}{V}} \Longrightarrow 3 \cdot 11,5V - 270 = 4 \cdot (x - 90) \Longrightarrow 3 \cdot 11,5 \cdot \frac{x}{9} = 4x - 90 \Longrightarrow x = 540\text{km.}$$

Então, a velocidade V será dada por: $V = \frac{540}{9} = 60$km/h.

Na primeira hora o trem percorre a distância $60 \cdot 1 = 60$km.

Assim, a distância total será $60 + 540 = 600$km.

3. Como os dados são jogados duas vezes haverá 36 possíveis números. Todos eles têm o algarismo 1 na casa das unidades. Na soma dos 36 números, esses algarismos resultarão em um resultado parcial igual a 36. O segundo algarismo 1 (do meio), aparecerá seis vezes na casa das centenas(devido às seis possibilidades de número da primeira jogada do dado), mais seis vezes na casa do milhar, etc. Portanto, haverá uma parcela que será igual a:

$$6 \cdot (100 + 1000 + ... + 10000000) = 66666600.$$

O primeiro algarismo poderá aparecer na casa da dezena de milhar, ou na casa da centena de milhar, etc. Ao todo, obtemos a seguinte soma das parcelas:

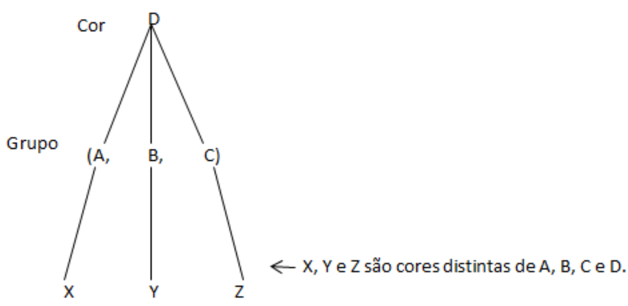
$$1111110000 + 11111100000 + ... + 111111000000000 = 123456543210000.$$

Portanto, a soma dos 36 possíveis números será igual a :

$$36 + 66666600 + 123456543210000.$$

A primeira parcela é 36, a segunda e a terceira são múltiplas de 4 e 9, e portanto de 36.

4. Sejam A,B,C,D,... as possíveis cores distintas. Como por (i) existe um grupo, digamos que seja formado pelas cores (A,B,C). Por (ii), deve existir um outro grupo com bolinhas de cores todas distintas de A e portanto, deve existir um grupo com uma quarta cor, por exemplo, a cor D. Por (iii), para as cores D e A deve existir um grupo em que a terceira cor não é B nem C. O mesmo ocorre com as cores D e B e as cores D e C .
O esquema é o seguinte :



Portanto, no mínimo, necessitamos de 7 cores para montar os grupos. Será possível montar esses grupos, satisfazendo $(i), (ii)$ e (iii)com exatamente 7 cores?

Vejamos os grupos possíveis (com as cores A,B,C,D,E,F e G):

(A,B,C), (A,D,E), (A,F,G), (B,D,F), (C,E,F), (B,E,G) e (C,D,G).

Portanto, o número mínimo de cores é 7 e com essas cores é possível montar 7 grupos.

5. Da propriedade (iii) vemos que todo conjunto A deverá conter algum número ímpar.
O conjunto que contenha apenas o número 1 deverá ser:

$$\{1, 2, 2^2, ..., 2^{10}\}.$$

O conjunto que contém apenas o ímpar 3 é:

$$\{3, 6, 12, ..., \underbrace{3.2^9}_{1536}\}.$$

O conjunto que contém apenas os ímpares 1 e 3 é:

$$\{1, 2, ..., 2^{10}, 3, 3.2, ..., 6, 12, ..., \underbrace{3.2^9}_{1536}\}.$$

Seja n um número de um conjunto A qualquer. Então $n = k.2^m$, com k ímpar. Assim, para contarmos todos os conjuntos A não vazios satisfazendo (i), (ii) e (iii) basta contar todos os subconjuntos formados a partir do conjunto de ímpares $B = \{1, 3, 5, ..., 2013\}$.

Ora, o número de subconjuntos de B é 2^{1007} (pois de 1 a 2013 há $\frac{2013-1}{2} + 1 = 1006 + 1 = 1007$ números ímpares), incluindo o vazio.

Portanto o número pedido é igual a $2^{1007} - 1$ (não incluímos o conjunto vazio).

Gabarito Nível 3

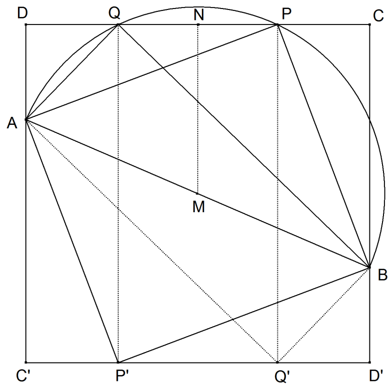
1. Como os dados são jogados duas vezes haverá 36 possíveis números. Todos eles têm o algarismo 1 na casa das unidades. Na soma dos 36 números esses algarismos resultarão em um resultado parcial igual a 36.
   O segundo algarismo 1 (do meio) aparecerá seis vezes na casa das centenas (devido às seis possibilidades de número da primeira jogada do dado), mais seis vezes na casa do milhar etc.
   Portanto haverá uma parcela que será igual a:
   $$6 \cdot (100 + 1000 + \ldots + 10000000) = 66666600.$$
   O primeiro algarismo poderá aparecer na casa da dezena de milhar, ou na casa da centena de milhar etc. Ao todo, obtemos a seguinte soma das parcelas:
   $$111111\underbrace{0000}_{4} + 111111\underbrace{00000}_{5} + \ldots + 111111\underbrace{000000000}_{9} = 123456543210000.$$
   Portanto, a soma dos 36 possíveis números será igual a:
   $$36 + 66666600 + 123456543210000.$$
   A primeira parcela é 36, a segunda e a terceira são múltiplas de 4 e de 9, e portanto de 36.

2. **Solução** 1:

   Seja $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ com N em $\overline{CD}$.

   Como $MQ = MP$ então o $\triangle MQP$ é isóceles e N é ponto médio de $\overline{QP}$. Mas, como M é ponto médio de $\overline{AB}$, então N é ponto médio de $\overline{CD}$. Logo $DQ = PC$.

Tomemos agora o simétrico da figura acima em relação ao ponto M.



Note que, de $PC = DQ$ teremos $P'C' = DQ$. Analogamente $Q'D' = PC$. Segue-se que $\overline{P'Q}//\overline{PQ'}//\overline{C'D}$.

Assim, $A_{\triangle ABQ}+A_{\triangle ABP} = A_{\triangle ABQ}+A_{\triangle ABP'} = \dfrac{P'Q \cdot DQ}{2}+\dfrac{P'Q \cdot CQ}{2} = \dfrac{P'Q}{2} \cdot (DQ + CQ) = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CD = A_{ABCD}$.

Solução 2:

Seja $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ com N em $\overline{CD}$.

De $MQ = MP$ temos $QN = PN$ e portanto $DQ = PC$. Seja $A_{\triangle PNM} = A_{\triangle QNM} = A$.

Agora, $A_{\triangle AQM} = \dfrac{A_{\triangle ABQ}}{2}$ e $A_{\triangle BPM} = \dfrac{A_{\triangle ABP}}{2}$.

Além disso,

$A_{\triangle AQM} + A = A_{AMND} - A_{\triangle ADQ}$
$A_{\triangle BPM} + A = A_{MBCN} - A_{\triangle BCP}$.

Somando,

$A_{\triangle AQM} + A_{\triangle BPM} + 2A = \underbrace{(A_{AMND} + A_{MBCN})}_{A_{ABCD}} - A_{\triangle ADQ} - A_{\triangle BCP}$, ou

$2A_{\triangle AQM} + 2A_{\triangle BPM} + 4A = 2A_{ABCD} - 2A_{\triangle ADQ} - 2A_{\triangle BCP}$, ou

$A_{\triangle ABQ} + A_{\triangle ABP} + PQ \cdot MN = 2A_{ABCD} - AD \cdot DQ - BC \cdot PC = 2A_{ABCD} - PC(\underbrace{AD + BC}_{2MN})$.

Assim,

$A_{\triangle ABQ} + A_{\triangle ABP} = 2A_{ABCD} - (\underbrace{PQ + 2PC}_{CD}) \cdot MN = 2A_{ABCD} - A_{ABCD} = A_{ABCD}$.

3. Seja $H \in [0, 12)$. Se um horário é representado por H (usaremos representação decimal; p. ex., 2h 15min será 2,25), então o ponteiro das horas está na posição (medida em graus e no sentido horário) $h = 30H$ e o dos minutos na posição $m = 360(H - \lfloor H \rfloor)$ em que $\lfloor n \rfloor$ representa a parte inteira de n . Para que a inversão dos ponteiros dê origem a uma nova hora, deve existir $H' \in [0, 12)$ tal que:

$$h' = 30 \cdot H' = m$$

e

$$m' = 360(H' - \lfloor H' \rfloor) = h.$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} H' = 12(H - \lfloor H \rfloor) \\ H = 12(H' - \lfloor H' \rfloor). \end{cases}$$

Montando uma única equação para H:

$$H = 12\left(12(H - \lfloor H \rfloor) - \lfloor 12(H - \lfloor H \rfloor) \rfloor\right). \ (*)$$

Isso nos diz que podemos inverter os ponteiros em uma hora H se, e somente se H satisfaz $(*)$.
Resta encontrar o número de soluções de $(*)$, com $0 \leq H < 12$. Escreva $H = k + \frac{k'}{12} + \frac{k''}{144}$, com k, k' $\in \mathbb{N}$ e $0 \leq k, k', k'' < 12$.
Note que todo H se escreve de maneira única na forma acima.
Claramente:

$$\begin{aligned} \lfloor H \rfloor &= k \\ H - \lfloor H \rfloor &= \frac{k'}{12} + \frac{k''}{144} \\ 12(H - \lfloor H \rfloor) &= k' + \frac{k''}{12} \quad \text{e} \quad \lfloor 12(H - \lfloor H \rfloor) \rfloor = k'. \end{aligned}$$

Com isso, $(*)$ é equivalente a:

$$\begin{aligned} k + \frac{k'}{12} + \frac{k''}{144} &= 12\left(k' + \frac{k''}{12} - k'\right) \\ \Rightarrow k + \frac{k'}{12} &= \frac{143k''}{144}. \ (**) \end{aligned}$$

Escolhidos k e k', existe único k'' que torna $(**)$ verdadeira. Como existem 144 possibilidades de escolha para k e k', então há 144 horas que satisfazem $(*)$. Porém, quando $k = k' = 11$, devemos ter $k'' = 12$, o que não é permitido. Para quaisquer outros valores de k e k', obtemos $k'' < 12$. Com isso, há 143 soluções em $[0, 12)$ e 144 em $[0, 12]$.

4. a) Comecemos por observar que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$, e portanto $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 =$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Assim, se $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, teremos $1 + \dfrac{1}{\alpha} = \alpha$. Então $f(\alpha) = f(1 + \dfrac{1}{\alpha}) = 1 + \dfrac{1}{f(\alpha)}$. Daí:

$$(f(\alpha))^2 - f(\alpha) - 1 = 0 \Longrightarrow f(\alpha) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $f(\alpha) \in \mathbb{R}_+^*$, então $f(\alpha) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$.

b) Note que $f(1) = 2 = \dfrac{F_2}{F_1}$.
Podemos observar que:

$$\left((f \circ f)(1) = f(2) = f\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = f\left(\frac{F_1 + 1}{F_1}\right) = f\left(1 + \frac{1}{F_1}\right)\right.$$
$$\left. = 1 + \frac{1}{f(F_1)} = 1 + \frac{1}{f(1)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{F_3}{F_2}\right).$$

Por indução, supomos que $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n}(1) = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ é verdadeiro até n, então para $n+1$:

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n+1}(1) = f\,\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n}(1) = f\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = f\left(\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}\right) =$$
$$f\left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) = 1 + \frac{1}{f\left(\dfrac{F_n}{F_{n-1}}\right)} = 1 + \frac{1}{\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n}(1)} =$$
$$1 + \frac{1}{\dfrac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

5. Note que de $2013 = 7 \cdot 287 + 4$ temos:

$$2013^k = (7 \cdot 287 + 4)^k = 7M + 4^k.$$

Por outro lado, o expoente $2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}$ pode ser escrito, de $2013 = 6 \cdot 335 + 3$, como $2013^l = (6 \cdot 335 + 3)^l = 6L + 3^l = 6L + 3^l - 3 + 3 = 6L + 3(3^{l-1} - 1) + 3 = 6L + 6N + 3 = 6L' + 3$.

Portanto, $2013^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} = 7M + 4^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} = 7M + 4^{6L'+3} = 7M + 4^{6L'} \cdot 4^3$. Como $4^{6L'} = 64^{2L'} = (63+1)^{2L'} = (7 \cdot 9 + 1)^{2L'} = 7k + 1$, então $4^{6L'} \cdot 4^3 = (7K + 1) \cdot 4^3 = 7X + 4^3$. Então:

$$2013^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} = 7M + 7X + 4^3 = 7(M + X) + 4^3 = \\ 7(M + X) + 63 + 1 = 7Y + 1.$$

Logo, $2013^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} - 1$ é múltiplo de 7.

Observação: Em linguagem modular tudo o que foi escrito acima, pode ser escrito como:

$$2013^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} \equiv 4^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} (mod 7).$$

Como $2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}} \equiv 3 (mod 6)$, então $2013^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} \equiv 4^{2013^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2013}}}}} \equiv 4^3 \equiv 1 (mod 7)$.

III ORMM (2013)

III ORMM em Números

Na III Olimpíada Regional Mirim de Matemática participaram 222 alunos do quinto ano do ensino fundamental, oriundos de duas escolas particulares (Educandário Imaculada Conceição e Escola Dinâmica) e uma escola pública (Colégio de Aplicação UFSC) de Florianópolis.

Na cerimônia, foram premiados 24 estudantes: 1 medalha de ouro, 5 com medalhas de prata, 6 com medalhas de bronze e 9 com menções honrosas.

Ouro

- Isabela Klein Paludo (Educandário Imaculada Conceição)

Prata

- Ana Cláudia Zezulka Machada (Colégio de Aplicação UFSC)
- Catarina Rocha Herrera (Colégio de Aplicação UFSC)
- Flávia Aiko Miura (Educandário Imaculada Conceição)
- Gabriel Da Silva Homem (Colégio de Aplicação UFSC)
- João Marcos Moço Giraldi (Educandário Imaculada Conceição)

Bronze

- Helena Callado Ferreira (Educandário Imaculada Conceição)
- Henrique Leal De Souza Martins (Colégio de Aplicação)
- Lucas Bossi Savi (Educandário Imaculada Conceição)
- Sarah Narcisa De Moraes Carvalho (Colégio de Aplicação UFSC)
- Sophia Pieckocz De Aguiar (Colégio de Aplicação UFSC)
- Yuri Paz (Escola Dinâmica)

Menção Honrosa

- Beatriz Mager Pereira (Escola Dinâmica)
- Bernardo Carmisini Ferreira (Colégio de Aplicação UFSC)
- Jorge Luiz De Gouveia Yared (Educandário Imaculada Conceição)
- Letícia Bernardo Silvano (Educandário Imaculada Conceição)
- Luana Prim Ferreira (Educandário Imaculada Conceição)
- Marco Antonio Maciel Pinheiro (Escola Dinâmica)
- Santiago Cardoso (Escola Dinâmica)
- Sol Majoral Catela (Colégio de Aplicação UFSC)
- Tamayo Zanfoflin Pires De Almeida Motta Dias (Colégio de Aplicação UFSC)

Prova

Questão 01

O segredo de um cofre é um número de quatro algarismo, mas só conhecemos o segundo algarismo. Para descobrir o segredo, complete os quadradinhos para formar o número, seguindo as instruções:

	8		
1^o	2^o	3^o	4^o

1º) O segundo algarismo é o dobro do primeiro algarismo, somado com 2.

2º) O terceiro algarismo é a diferença entre o segundo algarismo e o primeiro algarismo.

3º) A soma de todos os algarismos é 18.

Questão 02

A escola Saber organizou uma excursão dos alunos dos quintos anos para conhecer um museu. Foram dois ônibus com 43 lugares cada um e quatro vans com 12 lugares cada uma. Além dos alunos, haverá um professor em cada veículo. Três décimos dos alunos vão de van e não sobra lugar nos dois ônibus.

a) Quantos alunos foram visitar o museu de ônibus? Quantos alunos foram de van?

b) Sobrarão lugares nas vans?

Questão 03

A figura abaixo é o desenho da planta da oficina do seu João. A área total da oficina é $80m^2$. Os retângulos pequenos têm a mesma área e o retângulo grande tem o dobro da área do retângulo pequeno. Seu João quer colocar um novo piso na área pintada de cinza na figura. Um metro quadrado de piso custa R\$ $30,00$.

a) Quanto pagará seu João pelo piso novo?

b) Se o trabalho do pedreiro custa R\$$40,00$ por metro quadrado, quanto pagará seu João pelo total da obra?

Questão 04

Um número de dois algarismos é Leal quando duas coisas acontecem ao mesmo tempo:

1º) O número é ímpar;

2º) A diferença entre o maior algarismo e o menor algarismo do número também é um número ímpar.

Por exemplo: 29 é um número Leal, pois 29 é um número ímpar e $9 - 2 = 7$ também é ímpar. Quantos números Leais existem?

Gabarito

Questão 1

Como o segundo algarismo é o dobro do primeiro somado com dois, o primeiro algarismo é 3, pois $(3x2) + 2 = 8$. O terceiro algarismo é a diferença $8 - 3 = 5$. Já temos três algarismos, que somam $3 + 8 + 5 = 16$, como a soma do total é 18, o quarto algarismo é $18 - 16 = 2$.

Logo, o segredo do cofre é o número 3852.

Questão 2

Cada ônibus pode levar 43 pessoas: 42 alunos e um professor. Assim, os ônibus podem levar $42 + 42 = 84$ alunos. Se $\frac{3}{10}$ dos alunos vão de van, então $\frac{7}{10}$ dos alunos vão de ônibus, pois $\frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 1$. Assim, o número de alunos que vão de ônibus corresponde a $\frac{7}{10}$ do total de alunos que foram visitar o museu. Como não sobra lugar nos ônibus, 84 corresponde a $\frac{7}{10}$ dos alunos. $\frac{1}{10}$ dos alunos corresponde a $84 \div 7 = 12$; $\frac{10}{10}$ corresponde a $12 \times 10 = 120$, que é o total de alunos. Foram de van $120 - 84 = 36$ alunos.

Cada van pode levar 12 pessoas: 11 alunos e um professor. Assim, caberiam nas vans $11 \times 4 = 44$ alunos; como foram 36 alunos de van e 4 professores, sobrarão $44-(36+4) = 4$ lugares para os alunos (os lugares dos professores estão garantidos!)

Logo, 84 alunos foram visitar o museu de ônibus, 36 de van e sobraram lugares para os alunos nas vans.

Questão 3

Se os retângulos pequenos têm a mesma área e o retângulo grande tem o dobro da área do retângulo pequeno, concluímos que a área total de $80m^2$ é equivalente à área de quatro retângulos pequenos, de mesma área. Então cada retângulo pequeno tem área $80 \div 4 = 20m^2$. O valor do piso novo é $20 \times 30 = 600$ reais. O trabalho do pedreiro é $20 \times 40 = 800$ reais. O custo total da obra é de $600 + 800 = 1400$ reais.

Logo, João pagará R$ 600,00 pelo piso novo e R$ 1400,00 pelo total da obra.

Questão 4

Como o número é ímpar, seu algarismo das unidades pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9. Como a diferença entre dois números ímpares é sempre par, concluímos que o primeiro algarismo deve ser par: 2, 4, 6 ou 8. Assim, os números são: 21, 23, 25, 27, 29, 41, 43, 45, 47, 49, 61, 63, 65, 67, 69, 81, 83, 85, 87, 89, totalizando 20 números leais.

Artigos

Problema do Quadrado Equivalente a um Hexágono Regular: Uma Revoada de Polígonos

Antônio Vladimir Martins [1] e José Luiz Rosas Pinho[2]

Qualquer hexágono regular pode ser dividido em certo número de polígonos que podem ser recombinados formando um retângulo. A figura abaixo mostra a divisão de um hexágono regular em cinco polígonos (um triângulo isósceles e quatro quadriláteros) e o retângulo resultante da nova junção desses polígonos.

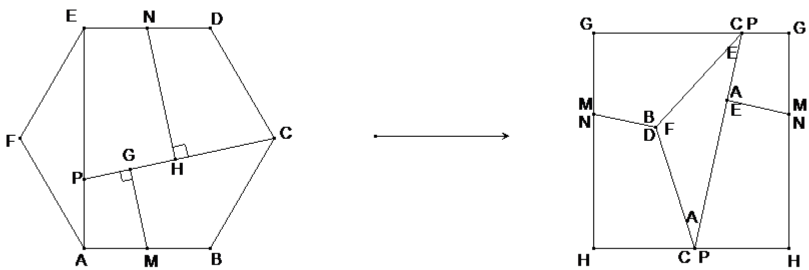


Figura 1

Mais exatamente, para qualquer ponto **P** em uma das diagonais menores do hexágono regular - na figura a diagonal $\overline{AE}$ - traçando-se o segmento $\overline{CP}$ e os segmentos $\overline{MG}$ e $\overline{NH}$ perpendiculares a esse segmento pelos pontos médios **M** e **N**, respectivamente dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, obtemos a divisão desse hexágono nos cinco polígonos desejados. Esses cinco polígonos (os quatro quadriláteros de formas variáveis, segundo a posição do ponto **P** na diagonal $\overline{AE}$) são então reagrupados para formar um retângulo conforme provado no TCC da aluna Michele Moreira de Souza, orientanda do primeiro autor deste artigo.

[1] Professor do Departamento de Matemática da UFSC.
[2] Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

Note que o comprimento do lado "horizontal" do retângulo é igual ao comprimento do segmento $\overline{CP}$ na figura do hexágono, e o comprimento do lado "vertical" do retângulo é igual à soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{GM}$ e $\overline{NH}$ na figura do hexágono. O comprimento do lado "horizontal" do retângulo decresce de um valor máximo igual ao comprimento da diagonal $\overline{CA}$ (que é igual ao comprimento de $\overline{AE}$) até o valor mínimo igual ao comprimento do segmento cujas extremidades são o vértice C do hexágono e a projeção deste ponto sobre o segmento $\overline{AE}$ (o ponto médio de $\overline{AE}$). Por outro lado, o comprimento do lado "vertical" cresce desde o valor mínimo igual à distância entre os pontos médios de dois lados alternados do hexágono (que é exatamente o valor mínimo do lado "horizontal" do retângulo - por quê?) até o valor máximo igual à distância entre dois lados paralelos do hexágono (que é o valor máximo do lado "horizontal").

Portanto, deslocando **P** desde o ponto **A** até o ponto médio de $\overline{AE}$, variamos o retângulo a um retângulo congruente a ele, mas com os lados "horizontal" e "vertical" trocados. Por um raciocínio de continuidade, eventualmente esse retângulo será um quadrado.

Algumas perguntas podem ser feitas aqui:

1. Qual é o comprimento do lado desse quadrado em função do lado do hexágono?

2. Como determinar, com régua e compasso, a posição do ponto **P** na diagonal $\overline{AE}$ do hexágono, de modo que o retângulo equivalente ao hexágono seja o quadrado?

3. Qual é o valor do comprimento de $\overline{AP}$ em função do lado do hexágono?

4. Qual o valor mínimo e o valor máximo que a diagonal desses retângulos pode atingir?

A segunda pergunta é fácil de ser respondida, pois o lado do quadrado será a média geométrica dos lados de qualquer retângulo equivalente construído a partir dos cinco polígonos que dividem o hexágono regular.

Para responder a primeira pergunta basta observar que existe um único quadrado equivalente a um hexágono regular dado.

Assim podemos calcular o lado desse quadrado em função, por exemplo, do lado do hexágono (que é o raio do círculo circunscrito a ele). Esse cálculo é simples, observando que o hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros de lados iguais ao lado do hexágono:

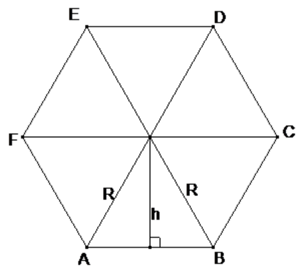


Figura 2

A área do hexágono será então igual a

$$A_{hex} = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = x^2,$$

em que x é o lado do quadrado. Portanto

$$x = R \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\right).$$

Por outro lado,

$$A_{hex} = 6 \cdot \frac{Rh}{2} = 3h \cdot R = x^2,$$

o que nos diz que o lado do quadrado é igual à média geométrica entre o triplo da altura do triângulo equilátero de lados iguais ao lado do hexágono e o próprio lado (que é o raio R). Essa é uma conta possível para realizar a construção do quadrado, como mostra a figura seguinte:

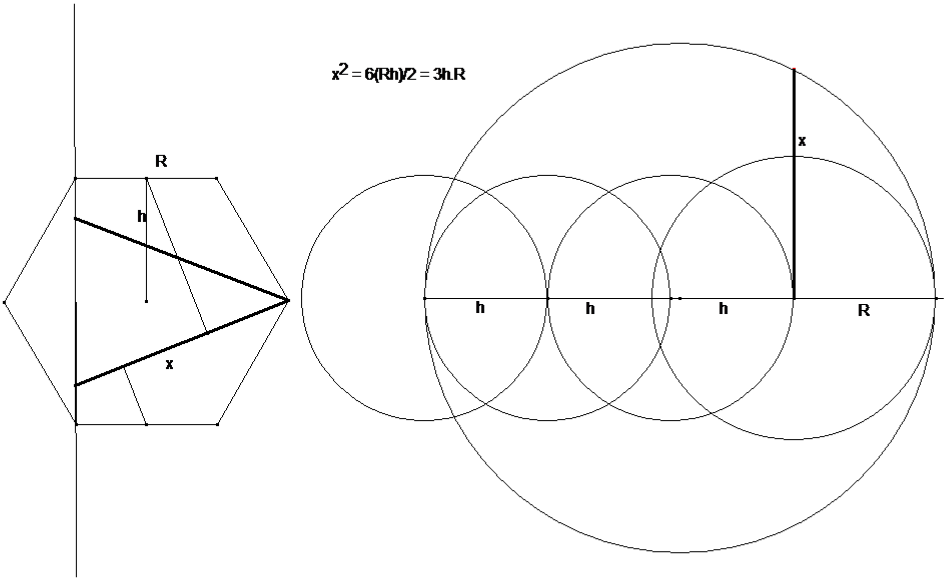


Figura 3

Isto nos permite calcular onde o ponto **P** deve estar:

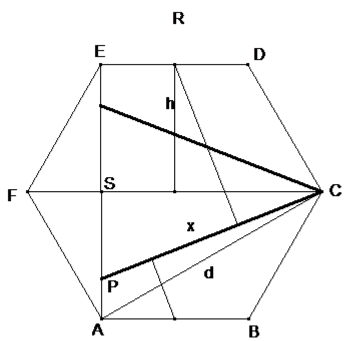


Figura 4

ou seja, qual é a distância **AP** na figura 4 acima, o que responde a terceira pergunta.

Observe que a diagonal $\overline{AE}$ do hexágono é igual a **AC**$= d$, **AS**$= \frac{d}{2}$ e **CS**$= \frac{3R}{2}$.

Então

$$d^2 = \left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3d^2}{4} = \left(\frac{3R}{2}\right)^2 \Rightarrow d = R\sqrt{3}.$$

Então

$$\mathbf{PS}^2 = x^2 - (\mathbf{CS})^2 = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} - \frac{9R^2}{4} = \frac{R^2}{4}(6\sqrt{3} - 9) \Rightarrow \mathbf{PS} = \frac{R\sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2}.$$

Portanto

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AS} - \mathbf{PS} = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R\sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 9}\right).$$

Observe que o valor encontrado para o lado do quadrado é de fato um número que está entre **CS** e **AC**:

$$\frac{3R}{2} < R \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\right) < R\sqrt{3}.$$

Vamos agora responder a quarta pergunta.

Observe que, se x e y são os lados de um retângulo, então sua área A é igual a (xy), seu semi-perímetro p é $(x + y)$ e sua diagonal d é igual $\sqrt{x^2 + y^2}$. Então,

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow p^2 = x^2 + y^2 + 2A \Rightarrow d^2 = p^2 - 2A.$$

Portanto, como em nosso problema a área A dos retângulos está fixada (igual à área do hexágono), então a diagonal será mínima quando o semi-perímetro (ou o perímetro) for mínimo, e será máxima quando esse semi-perímetro for máximo.

Qual é o retângulo, dentre aqueles de área fixada, que tem perímetro mínimo? Para responder a essa pergunta vamos analisar o problema dual correspondente: qual é o retângulo, dentre aqueles de perímetro fixado, que possui área máxima (problema isoperimétrico)? Note que não há solução para a área mínima, pois, com o perímetro fixado, é possível obter um retângulo com a área tão próxima de zero quanto queiramos. O problema isoperimétrico para retângulos pode ser resolvido facilmente por argumentos puramente geométricos: se x e y são os lados do retângulo, então xy será sua área e queremos maximizar esse produto sabendo que $x+y$ está fixado. Maximizar o produto de dois números positivos é o mesmo que maximizar sua média geométrica $\sqrt{xy}$. Geometricamente isso corresponde a encontrar o triângulo retângulo, dentre todos aqueles cuja hipotenusa é constante e igual a $x+y$, cuja altura h relativa a essa hipotenusa é máxima. Essa altura divide a hipotenusa em dois segmentos, um de comprimento x e o outro de comprimento y e então $h=\sqrt{xy}$. Isso ocorrerá quando $h=x=y$, ou seja, quando o retângulo for quadrado. Veja a figura:

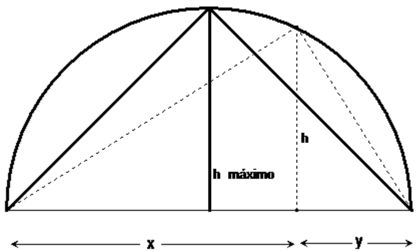


Figura 5

Retornemos agora ao problema do retângulo de área fixada e perímetro mínimo. A intuição nos diz que a resposta deve ser o quadrado. Suponhamos que o quadrado não seja o retângulo de área fixada A e de perímetro mínimo. Então existem (a questão da existência de um retângulo de perímetro mínimo é sutil e sua justificativa está além dos argumentos geométricos que utilizamos aqui) um retângulo não quadrado R de área A e de perímetro mínimo p, e o quadrado $\mathbf{Q_1}$ de mesma área A, que terá um perímetro $p+k$, $k>0$. Considere agora o quadrado $\mathbf{Q_2}$ de mesmo perímetro p do retângulo R. Pelo problema isoperimétrico, a área desse quadrado será igual a $A+d$, $d>0$. Isso não é possível, pois a área de $\mathbf{Q_1}$ seria menor do que a área de $\mathbf{Q_2}$, e portanto o perímetro de $\mathbf{Q_1}$ deveria ser menor do que o perímetro de $\mathbf{Q_2}$, o que não ocorre. Logo, o quadrado é o retângulo de área fixada e de perímetro mínimo.

Observe ainda que, olhando para o hexágono da figura 1, a posição do ponto **P** que permite a divisão desse polígono nos cinco polígonos cuja soma de seus perímetros é mínima é exatamente aquela que leva à construção do quadrado quando esses cinco polígonos são reagrupados. Isso ocorre porque essa soma é igual ao perímetro do hexágono (fixado), mais o comprimento da diagonal $\overline{AE}$, mais a soma dos comprimentos **CP**, **MG** e **NH**. Essa última soma é exatamente o semi-perímetro do quadrado que é a menor possível.

Vamos analisar agora o problema do retângulo equivalente ao hexágono regular (e portanto de área fixada) e de perímetro máximo. Note que o problema não tem solução para perímetro máximo no conjunto de todos os retângulos de área fixada, pois podemos fazer o perímetro tão grande quanto queiramos mantendo a área fixa. Porém, para os retângulos originados do hexágono regular, o problema tem solução. Novamente aqui a intuição nos diz que isso deve ocorrer quando o ponto **P** for o ponto médio **S** da diagonal $\overline{AE}$, considerando que o perímetro mínimo é atingido no quadrado quando escolhemos o ponto P entre os pontos A e S na diagonal $\overline{AE}$ e, que para **P** coincidindo com o ponto **A** ou com o ponto **S** os retângulos são congruentes.

No entanto, podemos provar que, de fato, a soma **CS** + **AE** é maior do que **CP** + **MG** + **NH**, qualquer que seja o ponto **P** entre **A** e **S**.

Observe a figura 6 abaixo:

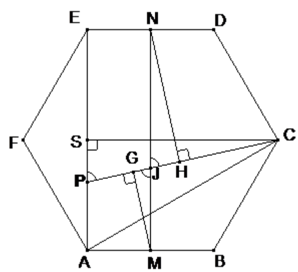


Figura 6

Queremos provar que

$$\mathbf{AE} + \mathbf{CS} = \mathbf{MN} + \mathbf{CS} > \mathbf{CP} + \mathbf{MG} + \mathbf{NH}. \tag{1}$$

Agora observe que os triângulos $\triangle\mathbf{CSP}$, $\triangle\mathbf{MGJ}$ e $\triangle\mathbf{NHJ}$ são semelhantes. Então

$$\frac{\mathbf{CS}}{\mathbf{CP}} = \frac{\mathbf{MG}}{\mathbf{MJ}} = \frac{\mathbf{NH}}{\mathbf{NJ}} = \frac{\mathbf{MG}+\mathbf{NH}}{\mathbf{MJ}+\mathbf{NJ}} = \frac{\mathbf{MG}+\mathbf{NH}}{\mathbf{MN}},$$

ou seja,

$$\frac{\mathbf{CS}}{\mathbf{CP}} = \frac{\mathbf{MG}+\mathbf{NH}}{\mathbf{MN}}. \tag{2}$$

Portanto (1) é o mesmo que mostrar que a soma do numerador do membro esquerdo e do denominador do membro direito é maior que a soma do denominador do membro esquerdo e do numerador do membro direito de (2).

Agora note que se a, b, c e d são números positivos, então

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Logo,

$$a + d > b + c \Leftrightarrow \frac{bc}{d} + d > b + c \Leftrightarrow \frac{bc}{c} - b > c - d \Leftrightarrow b\left(\frac{c-d}{d}\right) > c - d,$$

e então

$$\begin{aligned} a + d > b + c &\Leftrightarrow b > d, \quad se \quad c > d \quad e \\ &\Leftrightarrow b < d, \quad se \quad c < d. \end{aligned} \tag{3}$$

Agora note que em (2) temos $\mathbf{MG} + \mathbf{NH} < \mathbf{MN}$.

Portanto, como $\mathbf{CP} < \mathbf{MN} = \mathbf{AE} = \mathbf{AC}$, teremos a partir de (2) e de (3) que

$$\mathbf{MN} + \mathbf{CS} > \mathbf{CP} + \mathbf{MG} + \mathbf{NH}.$$

Referências

[1] de Souza, M. M.; Quebra-Cabeças Matemáticos Desafios, Trabalho de Conclusão de Curso, UFSC, 2014

Möbius, Möbius , Möbius

Eliezer Batista[1]

e.batista@ufsc.br

Resumo: Neste pequeno artigo, revisaremos algumas das contribuições importantes do matemático alemão August Ferdinand Möbius. Daremos destaque à fórmula da inversão de Möbius, que está relacionada com a álgebra de incidência em conjuntos parcialmente ordenados e que possui diversas aplicações em análise combinatória e teoria de números.

Introdução

O matemático e astrônomo August Ferdinand Möbius nasceu em 17 de novembro de 1790 em Schulpforta, antigo monastério próximo à cidade de Naumburg, na região da Saxônia, que atualmente pertence à Alemanha, e morreu em Leipzig, também na Alemanha, em 26 de setembro de 1868. Dentre as conexões interessantes que fizeram parte da sua vida, podemos destacar o fato de ser descendente, pelo ramo familiar de sua mãe, do grande reformador alemão Martinho Lutero. Também, sua formação matemática teve a influência de pesos pesados como Carl Friedrich Gauss e Johan Pfaff[2].

O nome de Möbius, em matemática, é relembrado basicamente por três de suas grandes contribuições: a faixa de Möbius, as tranformações de Möbius e a fórmula de inversão de Möbius. A faixa de Möbius, que é um exemplo de superfície bidimensional não orientável que pode ser imersa no espaço euclidiano tridimensional, é a mais popular das contribuições matemáticas de Möbius, tornando-se um símbolo icônico de nossa cultura visual. Sua imagem pode ser vista em diversos anúncios, obras de

[1]Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

[2]`http://en.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Möbius`

arte e logomarcas[3]. Tal popularidade se deve, em parte, ao uso desta superfície na obra do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898, Leewarden, Holanda-1972, Laren, Holanda)[4]. Uma faixa de Möbius é basicamente uma superfície que possui apenas um lado e cujo bordo é uma circunferência. É extremamente simples de se produzir uma faixa de Möbius com uma fita de papel, basta unir as duas extremidades com orientações opostas, conforme nos mostra a figura abaixo.

Figura 1: Faixa de Möbius obtida a partir de um retângulo.

A faixa de Möbius está relacionada a outras superfícies não orientáveis, como o plano projetivo e a garrafa de Klein. O plano projetivo é obtido ao identificarmos o bordo de uma faixa de Möbius com o bordo de um disco bidimensional. A garrafa de Klein, por sua vez, é obtida ao identificarmos os bordos de duas faixas de Möbius[5].

A segunda contribuição matemática de Möbius, as tranformações de Möbius, já é um tema que pode ser apreciado apenas por um público mais restrito, que possua algum treinamento matemático [6]. Uma transformação de Möbius, ou transformação linear fracionária, é uma função racional definida em um domínio do plano complexo que consiste do plano inteiro ou do plano inteiro menos um ponto. Mais especificamente, uma transformação de Möbius é definida por quatro números complexos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $ad - bc \neq 0$ e que associa a cada ponto z do plano complexo, excluindo-se o ponto $z_0 = -\frac{d}{c}$, o valor $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Estas transformações incluem todas as translações, rotações e mudanças de escala no plano complexo, bem como incluem também as inversões no plano, isto é, funções que tenham o mesmo comportamento da função $f(z) = \frac{1}{z}$. Estas tranformações estão relacionadas com a ação do grupo de transformações projetivas $PGL(2, \mathbb{C})$ sobre a reta projetiva complexa $\mathbb{CP}^1$, que é uma superfície homeomorfa à esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$. A cada elemento do grupo projetivo, associamos uma transformação de Möbius

[3] O IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, situado no Rio de Janeiro, possui como logo exatamente uma faixa de Möbius. http://www.impa.br/opencms/pt/

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

[5] http://web1.kcn.jp/hp28ah77/us27i_klpr.htm

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_transformation

por meio da projeção estereográfica da esfera no plano. Uma visualização da projeção estereográfica e das transformações de Möbius pode ser vista no vídeo do Youtube `https://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY`.

Neste artigo, nossa atenção será destinada a uma terceira contribuição do matemático, que é ainda menos conhecida, mesmo entre pessoas com alguma formação matemática e que tenham tido contato com as duas anteriores - a fórmula de inversão de Möbius. É bem provável que um estudante de graduação em Matemática termine seu curso sem que tenha contato com fórmula de inversão de Möbius. Mesmo assim, a fórmula de inversão de Möbius é um resultado que possui diversas aplicações, tanto em análise combinatória quanto em teoria de números.

Para entendermos o conteúdo da fórmula de inversão de Möbius, temos que fazer uso de técnicas relativas a conjuntos parcialmente ordenados (que denotaremos como POSETs, uma abreviação para a sigla em inglês, Partially Ordered Sets) . Na seção 2, faremos um breve apanhado das definições e resultados básicos da teoria de POSETs e apresentaremos a álgebra de incidência. Na seção 3 introduziremos a função de Möbius e a calcularemos para alguns POSETs importantes. Na seção 4 daremos alguns exemplos de apicações em análise combinatória. Basicamente, a aplicação da fórmula de inversão de Möbius para o POSET dos subconjuntos de um conjunto dado resulta no conhecido princípio de inclusão-exclusão. Utilizaremos este método para determinarmos o número de aplicações sobrejetoras entre conjuntos finitos e para o cálculo do número de permutações caóticas, isto é, permutações que não tenham pontos fixos. Finalmente, na seção 5, feremos uso da fórmula da inversão de Möbius em teoria de números para o cálculo da função totiente de Euler.

POSETs e álgebras de incidência

Definição 0.1 *Seja X um conjunto. Uma relação de ordem em X é um subconjunto $R \subseteq X \times X$ satisfazendo a três condições:*

(O1) Para todo $x \in X$, temos que $(x,x) \in R$.

(O2) Se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$, então $x = y$.

(O3) Se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$.

Observação 0.2 *As condições (O1), (O2) e (O3) da definição anterior são, respectivamente, chamadas de condição reflexiva, anti-simétrica e transitiva. A partir de agora, dados uma relação de ordem em um conjunto X e dois elementos $x, y \in X$,* *denotaremos por* $x \leq y$ *se* $(x, y) \in R$. *Com esta notação, as condições (O1), (O2) e (O3) podem ser reescritas como*

(O1) *Para todo* $x \in X$, *temos que* $x \leq x$.

(O2) *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *então* $x = y$.

(O3) *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *então* $x \leq z$.

Definição 0.3 *Um conjunto parcialmente ordenado (POSET) é um par* $(X, \leq)$, *em que* X *é um conjunto não vazio e* $\leq$ *é uma relação de ordem em* X. *Um conjunto é dito ser totalmente ordenado, se além disto satisfizer à condição que para quaisquer* $x, y \in X$ *ou temos que* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

Definição 0.4 *Dado um POSET* $(X, \leq)$ *e dois elementos* $x, y \in X$, *com* $x \leq y$, *definimos o intervalo entre* x *e* y *como o conjunto*

$$[x, y] = \{z \in X \,|\, x \leq z \leq y\}.$$

Um POSET é dito ser localmente finito se, para quaisquer $x, y \in X$, *com* $x \leq y$, *o intervalo* $[x, y]$ *é um conjunto finito.*

Exemplo 0.5 *Dado um conjunto* U, *o conjunto das partes de* U,

$$\mathcal{P}(U) = \{A \subseteq U\}$$

é um POSET com a relação de ordem $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. *Se o conjunto* U *é finito, então temos que* $\mathcal{P}(U)$ *é localmente finito.*

Exemplo 0.6 *O conjunto dos números inteiros* $\mathbb{Z}$ *com a ordem usual é um POSET totalmente ordenado, pois dados dois inteiros* m *e* n *ou temos que* $m \leq n$ *ou* $n \leq m$, *e localmente finito pois se* $m \leq n$ *então* $[m, n] = \{m, m+1, m+2, \ldots, m+(n-m) = n\}$.

Exemplo 0.7 *Dado um número inteiro positivo* n, *o conjunto*

$$D(n) = \{d \in \mathbb{Z}_+ \,|\, d|n\}$$

é um POSET, com a relação de ordem $d \leq d' \Leftrightarrow d|d'$. *De fato, todo número inteiro é divisor de si mesmo, isto é* $d|d$ *para todo* $d \in \mathbb{Z}$. *Logo, a propriedade reflexiva é* *facilmente verificada. Note que nos restringimos aos inteiros positivos, para que a propriedade anti-simétrica seja verificada, pois senão poderíamos ter $d|d'$ e $d'|d$ e $d = \pm d'$. A propriedade transitiva também pode ser verificada facilmente. De fato, se $d|d'$ e $d'|d''$ então existem $p, q \in \mathbb{Z}_+$ tais que $d' = pd$ e $d'' = qd'$. Logo, $d'' = pqd$, o que implica que $d|d''$. É fácil ver que $D(n)$ é um POSET localmente finito.*

Exemplo 0.8 *Sejam $(X_1, \leq_1)$ e $X_2, \leq_{@})$ dois POSETs. O produto cartesiano $X_1 \times X_2$ possui uma estrutura de POSET induzida pelas entruturas em X_1 e X_2 da seguinte forma: dizemos que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, para $x_1, y_1 \in X_1$ e $x_2, y_2 \in X_2$, se, e somente se $x_1 \leq_1 y_1$ e $x_2 \leq_2 y_2$. Deixamos como exercício a verificação de que $(X_1 \times X_2, \leq)$ satisfaz aos axiomas de ordem parcial.*

Os POSETs podem ser representados graficamente através dos diagramas de Hasse[7]. Basicamente, um diagrama de Hasse para um POSET $(X, \leq)$ é um grafo orientado cujo conjunto de vértices é igual ao conjunto X e, dados dois vértices $x, y \in X$, haverá uma aresta conectando-os, se, e somente se, $x \leq y$ ou $y \leq x$. As arestas não precisam ser indicadas com flechas, pois $x \leq y$ costuma denotar-se pelo elemento y acima do elemento x no grafo. Assim, a ordem é naturalmente estabelecida pela posição relativa entre os vértices.

[7] Helmut Hasse, 1898-1979, matemático alemão. `http://en.wikipedia.org/wiki/Helmut_Hasse`

O diagrama abaixo denota o POSET dos números naturais com a ordem usual.

$$\begin{tikzcd} \vdots \\ 3 \arrow[d, no head] \\ 2 \arrow[d, no head] \\ 1 \arrow[d, no head] \\ 0 \end{tikzcd}$$

Figura 2: Diagrama de Hasse do POSET dos números naturais.

O diagrama abaixo denota o POSET dos divisores do número 18. As setas estão indicando as relativas relações de divisibilidade entre os divisores.

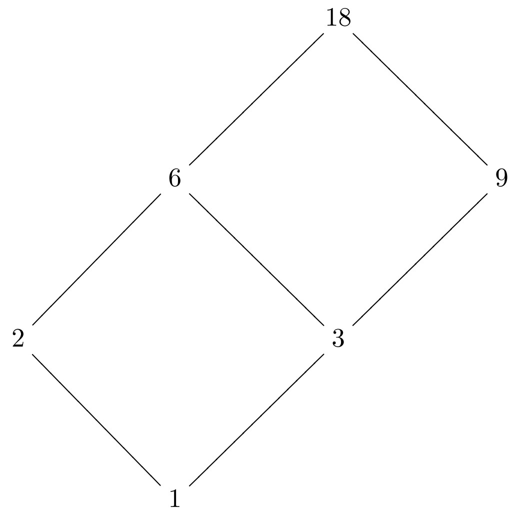


Figura 3: Diagrama de Hasse do POSET dos divisores de 18.

O diagrama abaixo denota o POSET dos subconjuntos do conjunto $\{a, b, c\}$ e as setas denotam as continências relativas entre os subconjuntos.

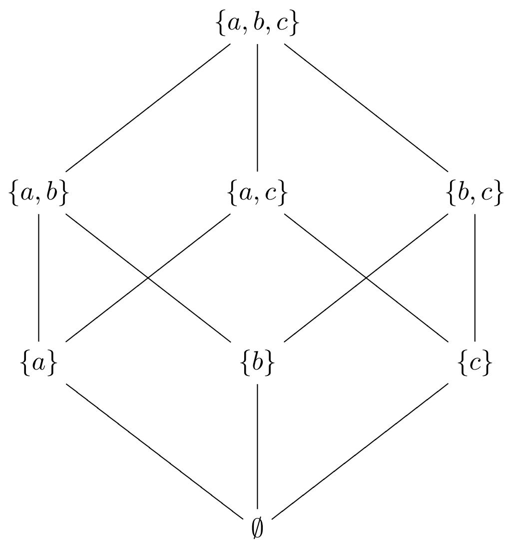


Figura 4: Diagrama de Hasse dos subconjuntos de $\{a, b, c\}$.

Os exemplos dados anteriormente mostram que a teoria de POSETs está presente em diversas áreas da matemática. De fato, esta linguagem pode ser utilizada para descrevermos diferentes tipos de situações matemáticas nos mais variados contextos. Para conseguirmos enxergar o imenso potencial da teoria de POSETs em relação às aplicações matemáticas, precisamos ainda desenvolver algumas ferramentas algébricas importantes, como a álgebra de incidência de um POSET.

Definição 0.9 *Seja $(X, \leq)$ um POSET localmente finito. A álgebra de incidência associada a X é o conjunto das funções*

$$I(X) = \{f : X \times X \to \mathbb{R} \mid f(x, y) = 0, \text{ se } x \not\leq y\}$$

munido das operações:

1. *Soma de funções: $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$.*
2. *Multiplicação por escalar: $(\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y)$.*

3. *Produto de convolução:* $(f * g)(x,y) = \sum_{z\in[x,y]} f(x,z)g(z,y)$.

Exercício: Mostre que, dado um POSET localmente finito X, as operações acima descritas estão bem definidas, fazendo com que $I(X)$ seja uma álgebra unital com $1 = \delta$, em que

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = y \\ 0 & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

é a função delta de Kronecker [8].

A priori, esta álgebra pode parecer uma construção muito abstrata, mas os exemplos a seguir mostrarão que muitas álgebras conhecidas podem ser vistas como exemplos de álgebras de incidência.

Exemplo 0.10 *Considere o POSET totalmente ordenado $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, com a ordem natural dos números inteiros. Uma função $f \in I(X)$ estará definida se forem conhecidos os seus valores $f_{ij} = f(i,j)$ com $i, j \in X$. Então podemos associar a função f a uma matriz $n \times n$ com entradas reais*

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

A restrição de que $f(i,j) = 0$ se $i \not\leq j$ faz com que a matriz da função f seja uma matriz triangular superior. Finalmente, podemos ver que o produto de convolução pode ser escrito como

$$(f * g)(i,j) = \sum_{i\leq k\leq j} f_{ik}g_{kj} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj},$$

em que, na última igualdade, os termos acrescentados à soma são todos iguais a zero. Portanto, o produto de convolução nada mais é do que a multiplicação matricial. Assim a álgebra de incidência $I(\{1,\ldots,n\})$ é isomorfa à álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$.

Exemplo 0.11 *Considere o POSET X dos subconjuntos de $\{a,b\}$. Este POSET possui 4 elementos, $1 = \emptyset$, $2 = \{a\}$, $3 = \{b\}$ e $4 = \{a,b\}$. Então podemos ver que*

[8]Leopold Kronecker, 1823-1891, matemático alemão. http://en.wikipedia.org/wiki/Leopold_Kronecker

esta álgebra de incidência será uma sub álgebra da álgebra de matrizes triangulares superiores 4×4 *em que a matriz de uma função* $f \in I(X)$ *será da seguinte forma:*

$$f = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Para falarmos do próximo exemplo, precisamos definir alguns novos objetos. Considere agora o POSET definido pelo conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}_+^*$ com a relação de ordem dada por $m \leq n \Leftrightarrow m|n$. Uma função aritmética é uma função $f : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{R}$. Este conjunto forma uma álgebra, que denotaremos por $A_{\mathbb{Z}_+^*}:$ a soma e a multiplicação por escalar são dadas ponto a ponto e o produto de convolução é dado por

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Note que a álgebra de convolução das funções aritméticas é comutativa. De fato,

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = (g * f)(n).$$

Esta álgebra está associada a uma sub álgebra da álgebra de incidência $I(\mathbb{Z}_+^*)$. De fato, considere a álgebra de incidência formada pelas funções

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & (m,n) & \mapsto & f(m,n) \end{array}$$

tais que $f(m,n) = f(1, \frac{n}{m})$, se $m|n$, e $f(m,n) = 0$, se m não divide n. Então este subconjunto será fechado em relação às operações da álgebra de incidência. Esta sub álgebra está relacionada com a álgebra das funções aritméticas $A_{\mathbb{Z}_+^*}$ associando-se a cada $f \in I(\mathbb{Z}_+^*)$ uma função $\widehat{f} \in A_{\mathbb{Z}_+^*}$ definida por

$$\widehat{f}(n) = f(1,n).$$

Isto define um isomorfismo entre as duas álgebras[9].

[9]Duas álgebras A e B são isomorfas se existe uma aplicação linear bijetiva $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi(a.b) = \varphi(a)\varphi(b)$,para todos $a, b \in A$ e $\varphi(1_A) = 1_B$

No estudo dos POSETs, muitas vezes é útil compararmos POSETs afim de que possamos reconhecer um POSET, cuja estrutura não conheçamos muito bem, como sendo idêntico a um outro POSET que tenhamos mais familiaridade. Para isto precisamos do conceito de isomorfismo.

Definição 0.12 *Dados dois POSETs* $(X \leq_X)$ *e* $(Y, \leq_Y)$*, uma função* $f : X \to Y$ *é dita ser um morfismo de POSETs se, dados* $x \leq_X y$ *em* X*, tivermos* $f(x) \leq_Y f(y)$ *em* Y*. Um morfismo de POSETs é dito ser um isomorfismo se* f *for uma função bijetora.*

O leitor será capaz de provar fatos elementares, como,

1) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são morfismos de POSETs, então $g \circ f : X \to Z$ também é um morfismo de POSETs

2) Se $f : X \to Y$ é um isomorfismo de POSETs, então a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é um isomorfismo de POSETs.

3) Se $f : X \to Y$ é um isomorfismo de POSETs, então f induz um isomorfismo entre as álgebras de incidência $I(X)$ e $I(Y)$.

Este último ítem será importante para compararmos álgebras de incidência de POSETs isomorfos e termos a garantia que, ao mostrarmos um resultado válido em uma delas, automaticamente o resultado será válido na outra.

A função de Möbius

O problema principal da fórmula da inversão de Möbius consiste no seguinte: dados um POSET $(X, \leq)$ e duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y), \tag{1}$$

determinar a função f conhecida a função g. Para isto, vamos definir uma função auxiliar, ζ na álgebra de convolução $I(X)$ por

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq y \\ 0 & \text{se} \quad x \not\leq y \end{cases}$$

Assim a equação (1) pode ser reescrita como

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)\zeta(y,x). \tag{2}$$

Assim, se tivermos uma função que seja inversa da função ζ na álgebra de convolução, automaticamente poderemos calcular f em função de g. Para isto precisamos de um lema.

Lema 0.13 *Sejam $(X, \leq)$ um POSET localmente finito e $\phi \in I(X)$ uma funçao tal que $\phi(x,x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Então ϕ é invertível com relação ao produto de convolução.*

Demonstração: Uma função ψ para ser inversa de ϕ pelo produto de convolução tem que satisfazer

$$\psi * \phi(x,y) = \sum_{z \in [x,y]} \psi(x,z)\phi(z,y) = \delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = y \\ 0 & \text{se} \quad x \neq y \end{cases},$$

e

$$\phi * \psi(x,y) = \sum_{z \in [x,y]} \phi(x,z)\psi(z,y) = \delta(x,y),$$

Tome $x \in X$, então

$$\psi * \phi(x,x) = \delta(x,x) = 1,$$

como $\phi(x,x) \neq 0$, isto nos leva a

$$\psi(x,x)\phi(x,x) = 1, \qquad \psi(x,x) = \frac{1}{\phi(x,x)}.$$

Suponha agora que, dados $x < y$ tenhamos calculados os valores $\psi(x,z)$ para todo $x \leq z < y$. Então

$$\psi * \phi(x,y) = \delta(x,y) = 0,$$

e por outro lado

$$\psi * \phi(x,y) = \sum_{x \leq z < y} \psi(x,z)\phi(z,y) + \psi(x,y)\phi(y,y).$$

Assim, teremos que

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{\phi(y,y)} \sum_{x \le z < y} \psi(x,z)\phi(z,y)$$

e portanto conseguimos calcular os valores da inversa em todos os pares $(x, y) \in X \times X$. Deixamos como exercício a verificação que esta função ψ assim definida também satisfaz $\phi * \psi(x, y) = \delta(x, y)$, isto é, ψ é inversa tanto à esquerda como à direita da função ϕ. ■

A função ζ definida anteriormente satisfaz a condição que $\zeta(x, x) = 1$ para todo $x \in X$. Então ζ possui inversa por convolução. Esta função, denotada por μ, é conhecida como função de Möbius.

Vamos calcular alguns exemplos de funções de Möbius para alguns POSETs específicos.

Exemplo 0.14 *Considere o POSET dos números naturais dado na Figura 2 (ou qualquer subconjunto finito da forma $\{0, 1, \ldots, n\}$). Tome um número arbitrário $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\mu(n,n) = \frac{1}{\zeta(n,n)} = 1.$$

Considere $m = n + 1$, então

$$\begin{aligned} \mu * \zeta(n, n+1) &= \mu(n,n)\zeta(n,n+1) + \mu(n,n+1)\zeta(n+1,n+1) \\ &= \delta(n,n+1) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu(n, n+1) = -1.$$

Se tomarmos $m = n + 2$ teremos

$$\begin{aligned} \mu * \zeta(n, n+2) &= \mu(n,n)\zeta(n,n+2) + \mu(n,n+1)\zeta(n+1,n+2) \\ &\quad + \mu(n,n+2)\zeta(n+2,n+2) \\ &= \delta(n,n+2) = 0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\mu(n, n+2) = 0.$$

Com um processo de indução elementar, pode-se provar que $\mu(n, n + k) = 0$ para $k \ge 2$.

A utilização do princípio da inversão de Möbius para este tipo de POSET pode ser vista da seguinte maneira: Se tivermos duas funções $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k),$$

então

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} g(k)\mu(k,n) = g(n) - g(n-1).$$

Proposição 0.15 *Sejam $(X_1, \leq_1)$ e $(X_2, \leq_2)$ dois POSETS. Então a função de Möbius associada ao POSET $X_1 \times X_2$ é igual ao produto das respectivas funções de Möbius de cada POSET.*

Demonstração: Primeiramente, relembremos que no produto cartesiano $X_1 \times X_2$ temos que $(x, y) \leq (x', y')$ se, e somente se, $x \leq x'$ e $y \leq y'$. É imediato ver que o intervalo $[(x, y), (x', y')] = [x, x'] \times [y, y']$. De fato, se $(x, y) \leq (x'', y'') \leq (x', y')$ então $x \leq x'' \leq x'$ e $y \leq y'' \leq y'$. Assim $x'' \in [x, x']$ e $y'' \in [y, y']$. Também, o produto de convolução em $I(X_1 \times X_2)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
& (f * g)((x,y),(x',y')) \\
= & \sum_{(x,y)\leq(x'',y'')\leq(x',y')} f((x,y),(x'',y''))g((x'',y''),(x',y')) \\
= & \sum_{x''\in[x,x']} \sum_{y''\in[y,y']} f((x,y),(x'',y''))g((x'',y''),(x',y')).
\end{aligned}$$

Finalmente, note que $\zeta((x, y), (x', y') = \zeta_1(x, x').\zeta_2(y, y')$. De fato, se $(x, y) \leq (x', y')$, então $\zeta((x, y), (x', y') = 1$. Logo, também temos que $x \leq x'$ e $y \leq y'$ o que resulta em $\zeta_1(x, x') = \zeta_2(y, y') = 1$. Por outro lado, se $(x, y) \not\leq (x', y')$, então $\zeta((x, y), (x', y') = 0$, e logo, $x \not\leq x'$ ou $y \not\leq y'$, o que resulta em $\zeta_1(x, x') = 0$ ou $\zeta_2(y, y') = 0$.

Juntando todas estas informações, definindo $\mu((x,y)(x',y')) = \mu_1(x,x').\mu_2(y,y')$, temos que

$$\begin{aligned}
& (\mu * \zeta)((x,y),(x',y')) \\
= & \sum_{x'' \in [x,x']} \sum_{y'' \in [y,y']} \mu((x,y),(x'',y''))\zeta((x'',y''),(x',y')) \\
= & \sum_{x'' \in [x,x']} \sum_{y'' \in [y,y']} \mu_1(x,x'')\mu_2(y,y'')\zeta_1(x'',x')\zeta_2(y'',y') \\
= & \left(\sum_{x'' \in [x,x']} \mu_1(x,x'')\zeta_1(x'',x')\right)\left(\sum_{y'' \in [y,y']} \mu_2(y,y'')\zeta_2(y'',y')\right) \\
= & \delta_1(x,x')\delta_2(y,y') \\
= & \delta((x,y),(x',y')).
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, podemos ver que $\zeta * \mu = \delta$, o que implica que a função μ é a inversa de ζ relativa ao produto de convolução. ■

Com o resultado acima, podemos calcular mais alguns exemplos da função de Möbius.

Exemplo 0.16 *Considere o POSET $\mathcal{P}(S)$, dos subconjuntos do conjunto*

$$S = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Este POSET pode ser caracterizado como um produto cartesiano de POSETs. De fato, dado um subconjunto $U \subseteq S$, podemos associar a este conjunto uma n-upla de números 0 ou 1 da seguinte forma: para $1 \leq k \leq n$, na késima entrada teremos 1, se $k \in U$, e 0, se $k \notin U$. Por exemplo, se $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $U = \{2,4,5,7\}$ então a 7-upla associada a U será $(0,1,0,1,1,0,1)$. Voltando ao caso geral, dado um número $1 \leq k \leq n$ podemos definir a função característica

$$\begin{array}{rccc} \chi_k : & \mathcal{P}(S) & \to & \{0,1\} \\ & U & \mapsto & \chi_k(U) \end{array}$$

dada por

$$\chi_k(U) = \begin{cases} 1 & se \quad k \in U \\ 0 & se \quad k \notin U. \end{cases}$$

Aqui, o conjunto $\{0,1\}$ é um POSET com a ordem herdada dos naturais, isto é, $0 < 1$. Com o auxílio das funções características, podemos ainda criar uma bijeção entre os

POSETs $\mathcal{P}(U)$ e $\{0,1\}^n$, dada exatamente pela n-upla associada a cada subconjunto:

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathcal{P}(S) & \to & \{0,1\} \\ & U & \mapsto & (\chi_1(U), \dots \chi_n(U)). \end{array}$$

É fácil ver que, se $U \subseteq V$, então $F(U) \leq F(V)$ no POSET produto cartesiano, pois todo elemento de U também será elemento de V. Assim, não há possibilidade de existir um número 1 em uma entrada na n-upla de $F(U)$ e que seja igual a 0 na n-upla de $F(V)$. Portanto, a função F é um morfismo de POSETs e como F é bijetora, então temos que os POSETs são isomorfos.

Tendo em vista que, se os POSETs são isomorfos e se soubermos calcular a função de Möbius em uma das álgebras de incidência, a função de Möbius estará unicamente determinada na outra álgebra de incidência, assumindo os mesmos valores. Agora, podemos fazer uso da proposição anterior para calcularmos a função de Möbius do POSET $\mathcal{P}(S)$. De fato, dados U e V dois subconjuntos de S, e lembrando-se que, no POSET $\{0,1\}$ temos $\mu(0,0) = \mu(1,1) = 1$, $\mu(0,1) = -1$ $\mu(1,0) = 0$. Então

$$\mu(U,V) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(\chi_i(U), \chi_i(V)) = \begin{cases} (-1)^{\#(V \setminus U)} & \textit{se} \quad U \subseteq V \\ 0 & \textit{se} \quad U \nsubseteq V \end{cases}$$

A utilização do método de inversão de Möbius para o POSET $\mathcal{P}(S)$ é conhecido em combinatória como o princípio de inclusão-exclusão.

Exemplo 0.17 *Considere o POSET $D(n)$, dos divisores de um número natural $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Podemos associar um divisor $d|n$ a uma k-upla $f(d) = (d_1, d_2, \dots, d_k)$, em que, para cada $1 \leq i \leq k$ temos $d_i \in \{0, 1, \dots, \alpha_i\}$. Deixamos ao encargo do leitor a verificação de que a função f define um isomorfismo entre o POSET $D(n)$ e o POSET produto $S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_k}$, com $S_{\alpha_i} = \{0, 1, \dots, \alpha_i\}$ para todo $1 \leq i \leq k$ e com a ordem em cada uma das entradas dada pela ordem herdada dos números naturais. Com isto, poderemos utilizar de novo a proposição anterior para calcularmos a função de Möbius de $D(n)$,*

$$\mu(c,d) = \prod_{i=1}^{k} \mu_i(c_i, d_i),$$

para dois divisores de n, $c = p_1^{c_1} \dots p_k^{c_k}$ e $d = p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}$. Se c não divide d então haverá um índice $1 \leq i \leq k$ tal que $c_i > d_i$ neste caso $\mu_i(c_i, d_i) = 0$. Portanto, *as únicas possibilidades para que $\mu(c,d) \neq 0$ serão quando $c|d$. Neste caso, como $\mu_i(c_i,d_i) = 1$, se $c_i = d_i$, $\mu_i(c_i,d_i) = -1$, se $d_i - c_i = 1$, e $\mu_i(c_i,d_i) = 0$ se $d_i - c_i \geq 2$, temos que*

$$\mu(c,d) = (-1)^l,$$

se $\frac{d}{c}$ for escrito como o produto de l fatores primos distintos; e

$$\mu(c,d) = 0,$$

se $\frac{d}{c}$ possuir algum fator quadrático.

Note que, para $c|d$ temos que $\mu(c,d) = \mu\left(1, \frac{d}{c}\right)$, o que implica que μ é uma função aritmética, a qual chamaremos simplesmente de $\mu\left(\frac{d}{c}\right)$.

Aplicações em análise combinatória

Vimos na seção anterior que a aplicação da fórmula de inversão de Möbius para o POSET dos subconjuntos de um conjunto finito dado é conhecido como princípio de inclusão-exclusão. Vamos ilustrar o método com dois exemplos.

Exemplo 0.18 *Sejam dois números naturais $m \leq n$, $I_n = \{1, \ldots n\}$ e $I_m = \{1, \ldots, m\}$. Podemos calcular quantas funções sobrejetoras $f : I_n \to I_m$ existem. Primeiramente, verificamos que o total de funções entre I_n e I_m é dado por m^n. Depois, defina duas funções $\Phi, \Psi : \mathcal{P}(I_m) \to \mathcal{R}$ como*

$$\Phi(A) = \#\{f : I_n \to I_m \,|\, Im(f) = I_m \backslash A\}$$

e

$$\Psi(A) = \#\{f : I_n \to I_m \,|\, Im(f) \subseteq I_m \backslash A\} = (m - \#A)^n.$$

Assim, temos que

$$\Psi(A) = \sum_{A \subseteq B \neq I_m} \Phi(B).$$

O número de funções sobrejetoras de I_n em I_m é exatamente o valor $\Phi(\emptyset)$. Portanto, utilizando a fórmula de inversão de Möbius, temos

$$\begin{aligned} \Phi(\emptyset) &= \sum_{A \neq I_m} \mu(\emptyset, A)\Psi(A) \\ &= \sum_{A \neq I_m} (-1)^{\#A}(m - \#A)^n. \end{aligned}$$

Para cada $0 \leq k \leq m$ *temos exatamente* $\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right)$ *subconjuntos* $A \subseteq I_m$ *com* $\#A = k$. *Assim, ainda podemos escrever*

$$\Phi(\emptyset) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) (m-k)^n.$$

Esta é a quantidade de funções sobrejetoras entre I_n *e* I_m, *para* $m \leq n$.

Exemplo 0.19 *Uma permutação caótica de* n *elementos é uma função bijetora* $f : I_n \to I_n$, *em que* $I_n = \{1, \ldots n\}$, *que não possui pontos fixos, isto é, não existe* $1 \leq k \leq n$ *tal que* $f(k) = k$. *Vamos denotar por* S_n *o conjunto de todas as permutações de* n *elementos. Podemos, de novo, definir duas funções* $\Phi : \Psi : \mathcal{P}(I_n) \to \mathcal{R}$ *como*

$$\Phi(A) = \#\{f \in S_n \,|\, f(k) = k \Leftrightarrow k \in A\}$$

(isto é, o número de permutações cujo conjunto de pontos fixos é exatamente igual a A*), e*

$$\Psi(A)\#\{f \in S_n \,|\, k \in A \Rightarrow f(k) = k\}$$

(isto é, o número de permutações cujo conjunto dos pontos fixos contém A*). É fácil ver que*

$$\Psi(A) = (n - \#A)!.$$

Também, podemos facilmente concluir que

$$\Psi(A) = \sum_{A \subseteq B \subseteq I_n} \Phi(B).$$

O número de permutações caóticas é exatamente $\Phi(\emptyset)$. *Portanto, aplicando a fórmula de inversão de Möbius, temos*

$$\begin{aligned} \Phi(\emptyset) &= \sum_{A \subseteq I_n} \mu(\emptyset, A)\Psi(A) \\ &= \sum_{A \subseteq I_n} (-1)^{\#A} (n - \#A)! \end{aligned}$$

Como para cada $1 \leq k \leq n$, *temos exatamente* $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ *subconjuntos* $A \subseteq I_n$ *com* $\#A = k$, *podemos ainda escrever*

$$\Phi(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Este é o número de permutações caóticas de n elementos.

Aplicações em teoria de números

Para todas as considerações que faremos nesta seção, o conjunto dos números naturais aqui significará simplesmente o conjunto dos números naturais positivos, isto é

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Definição 0.20 *A função totiente de Euler é a função aritmética*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \varphi(n) \end{array}$$

dada por

$$\varphi(n) = \#\{1 \leq k \leq n \,|\, mdc(n, k) = 1\}.$$

Vamos utilizar a fórmula de inversão de Möbius para calcularmos explicitamente o valor de $\varphi(n)$.

Proposição 0.21 *Seja n um número natural, então*

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Demonstração: Vamos realizar uma partição no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$: Para cada divisor d de n, defina o subconjunto

$$A(d) = \{1 \leq k \leq n \,|\, \mathrm{mdc}(k, n) = d\}.$$

É óbvio que se $d \neq d'$ então $A(d) \cap A(d') = \emptyset$. Agora suponha que $k \in A(d)$. Então $\mathrm{mdc}(k, n) = d$, e portanto $\mathrm{mdc}(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. Então a cardinalidade de cada conjunto $A(d)$ é igual à quantidade de números m entre 1 e $\frac{n}{d}$ tais que $\mathrm{mdc}(m, \frac{n}{d}) = 1$. Mas este número é exatamente $\varphi(\frac{n}{d})$. Assim, temos

$$n = \sum_{d|n} \#A(d) = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Isto conclui a demonstração. ■

Proposição 0.22 *Seja* n *um número natural cuja decomposição em fatores primos é expressa como* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. *Então*

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Demonstração: Da proposição anterior, temos que

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Então, pela fórmula de inversão de Möbius, podemos escrever

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Como $\mu(d) = 0$ se d tiver algum fator primo ao quadrado e $\mu(d) = (-1)^r$ se d for o produto de r números primos distintos, temos então

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} - \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{n}{p_i p_j} + (-1)^k \frac{n}{p_1 \dots p_k} \\ &= n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Referências

[1] T.M. Apostol, “Introducción a la teoría analítica de números”. Barcelona: Reverté, 2002.

[2] E.A. Bender and J.R. Goldman: “On the applications of Mobius inversion in combinatorial analysis”, Amer. Math. Monthly 82, (1975) 789-803. `https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/BenderGoldman.pdf`.

[3] N. Jacobson, “Basic Algebra I”, 2nd Edition. San Francisco: W.H Freeman and Co.,1985.

[4] J.P.O. Santos, “Introdução à teoria dos números” (Coleção Matemática Universitária). Rio de Janeiro: SBM, 2003.

[5] E. Stuhlsatz: “Möbius inversion formula”, `https://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2008/stuhlsatz.pdf`.

Problema de Apolônio de Perga

Licio Hernanes Bezerra [1]

licio.bezerra@ufsc.br

Apolônio nasceu entre 262 e 240 a.C. na antiga cidade grega de Perga, cujas ruínas se situam perto da cidade de Antália, na Turquia. Estudou em Alexandria com discípulos de Euclides, segundo relatos históricos. Um dos seus tratados, Cônicas, é um dos grandes trabalhos científicos do mundo antigo. Nesse texto, foram introduzidos os termos elipse, parábola e hipérbole para designar os três tipos de cônicas. Muitos de seus trabalhos desapareceram ou foram assimilados por matemáticos islâmicos. Em um desses tratados, Tangências, Apolônio debruçou-se sobre o seguinte problema, dito o problema de Apolônio: dados três objetos geométricos, cada um deles podendo ser ponto (P), reta (R) ou circunferência (C), construir uma circunferência tangente aos três. O problema se torna bastante difícil no caso de três circunferências (CCC). Uma solução deste problema usando apenas régua e compasso foi dada pelo matemático francês Joseph Diaz Gergonne em 1816, e pode ser vista em [2], páginas 154–159. São ao todo 10 tipos de problemas de Apolônio, que dão origem a 33 configurações distintas, que podem ser conferidas em [1]. Um fato interessante é que há casos que admitem uma infinidade de soluções, outros que não admitem solução e, se há um número finito de soluções, esse número não passa de 8. Além disso, em nenhum caso há exatamente 7 soluções. Na literatura, esses problemas são geralmente resolvidos por geometria inversiva ou por régua e compasso. Apresentamos aqui duas soluções por régua e compasso: uma, para o caso Ponto-Ponto-Reta (PPR); e outra, para o caso Ponto-Reta-Circunferência (PRC). Este último caso, embora apareçam na Internet aplicações em Java que mostrem uma resolução do problema por régua e compasso, é raro encontrar na literatura justificativas matemáticas do porquê da construção dessa resolução. Creio que a demonstração por geometria euclidiana de que esses procedimentos geram soluções verdadeiras é a principal contribuição deste trabalho. Veremos que a beleza e a simplicidade dessas construções sensibilizam qualquer professor ou admirador de Matemática. As figuras encontradas aqui foram todas geradas em Geo-

[1] Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

Gebra [3]

PPR

Dados dois pontos P e Q, e uma reta r, o problema consiste em traçar uma circunferência que passa pelos pontos e é tangente à reta r. Vamos supor aqui apenas os casos que têm solução.

- Se os dois pontos estão em uma reta paralela a r, o problema recai no problema PPP, pois o terceiro ponto é o ponto de interseção da mediatriz do segmento PQ com r.

- Vamos supor então que a reta que passa por P e Q intercepta r no ponto S. Denominando por T o ponto de tangência de uma circunferência solução com r (note que há exatamente duas circunferências soluções), temos pela Lei das Secantes que: $|ST|^2 = |SP| \, . \, |SQ|$. Logo, para determinar T, basta calcular a média geométrica de $|SP|$ e $|SQ|$ (justifique a construção na Figura 1 dessa média). Observe que, obtendo o comprimento de ST, o ponto de tangência da outra circunferência solução está na outra semirreta determinada por S em r, à mesma distância de S (que é o comprimento de ST). As duas circunferências soluções resultam, então, de dois problemas PPP.

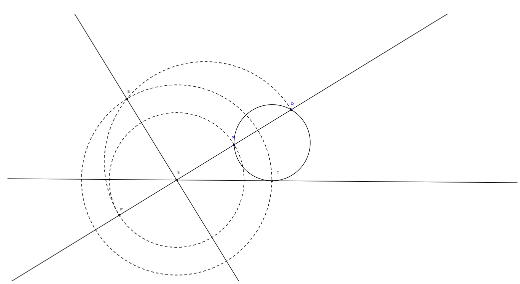


Figura 1: Média Geométrica de $|SP|$ e $|SQ|$

PCR

Vamos discutir aqui apenas os casos em que a reta r dada ou é tangente à circunferência c dada ou não intercepta c (deixamos para o leitor o caso em que r intercepta c, que admite 0, 1 ou 2 soluções, dependendo da posição de P).

- A reta r é tangente a c em um ponto T.
  - Se o ponto P dado está no interior de c, a solução resulta do caso PPP, em que os três pontos são T, P e o simétrico de P em relação à reta s, que é perpendicular a r e passa por T.
  - Se o ponto P está sobre a circunferência c, pode haver uma solução (se P for T', o oposto diametralmente a T), duas soluções (se P for diferente de T e T'), e infinitas soluções (se $P = T$). A construção por régua e compasso dessas soluções é deixada para o leitor.
  - Se o ponto P está fora de c, temos duas soluções: uma é a que passa por P, T e o simétrico de P em relação à reta perpendicular a r que passa por T; a outra é a que se constrói a partir de um procedimento similar ao usado para se construir uma solução para o caso em que c não é tangente a r, que é analisado no próximo ítem.
- A reta r não é concorrente com c.

  Primeiro, observe que se, em relação a r, P e c estão em lados diferentes, o problema não tem solução. Vamos supor então que, em relação a r, P e c estão do mesmo lado e que o centro de c é o ponto A. Queremos construir outra circunferência que passe por P e seja simultaneamente tangente a r e a c. Tracemos primeiro a reta perpendicular a $r$que passa por A e que vai intercepta-la no ponto D. Supondo o problema resolvido, considere a circunferência procurada (com centro em E) que passa por P, tangenciando a reta dada no ponto I e a circunferência dada em G, conforme a Figura 2.

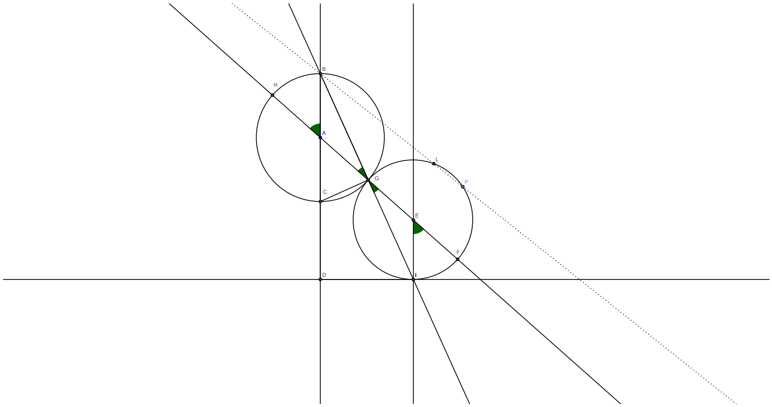


Figura 2: Problema PCR resolvido

Observemos que:

(a) Os segmentos BG e GI apoiam-se em uma mesma reta, pois os ângulos AHB e FEI são congruentes e, logo, os ângulos BGH e FGI são também congruentes.

(b) Os triângulos retângulos BGC e BDI são semelhantes e, portanto, $|BC|.|BD| = |BG|.|BI|$.

Agora, vamos considerar a circunferência que passa por P, C e D (ver Figura 3).

Tracemos a reta que liga B a P, que vai interceptar a circunferência em J. Pela Lei das Secantes, temos que: $|BC|\,.\,|BD| = |BJ|\,.\,|BP|$. Essa mesma reta intercepta a circunferência procurada em um ponto L e, também pela Lei das Secantes, teríamos que: $|BG|\,.\,|BI| = |BL|\,.\,|BP|$. Portanto, pelas igualdades acima, $|BJ| = |BL|$. Ou seja, $J = L$. Assim, o ponto J pertence à circunferência procurada, que é a circunferência que passa pelos pontos P e J, e que é tangente à reta dada, e recaímos no problema PPR, já discutido acima, que tem duas soluções. Esse problema tem outras duas soluções, em que c tangencia as soluções por dentro, isto é, c fica no interior das circunferências soluções. O procedimento é o mesmo, permutando-se os pontos B e C. Agora, o ponto G de tangência entre as duas circunferências é interno e está alinhado com os pontos B (antigo C) e I, que é o ponto de tangência da circunferência solução com r. É deixado para o leitor a continuação do procedimento para achar o novo ponto J (= L). Recaímos de novo no caso PPR, que tem duas soluções.

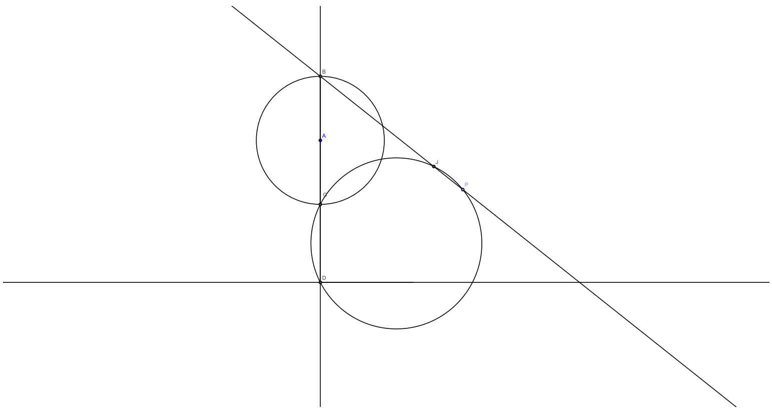


Figura 3: A interseção da circunferência que passa por P, C e D com a reta que liga B a P pertence a uma circunferência solução

Referências

[1] A. Bruen, J. C. Fisher and J. B. Wilker, **Apollonius by Inversion**, Mathematics Magazine 56 (2), 97-103, 1983.

[2] H. Dorrie, **100 Great Problems of Elementary Mathematics**, New York: Dover Publications, 1965.

[3] **GeoGebra:** http://www.geogebra.org.

Curiosidades

Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) 2018

O Congresso Internacional de Matemáticos foi criado em 1897 e é o evento sobre Matemática mais importante do mundo. Nele, matemáticos de todos os lugares do mundo se reúnem para relatar as últimas descobertas em todas as áreas da matemática e também para desenvolver novos projetos. A edição mais recente ocorreu em 2014 em Seul, Coreia do Sul, onde o brasileiro Artur Avila, 35 anos, ganhou a medalha Fields (considerado por alguns como o Nobel da Matemática, como foi falado na edição anterior da revista da ORM). E agora, temos uma boa notícia para nós brasileiros: a próxima edição do congresso será realizada no Brasil. Será a primeira vez na história que um país da América Latina (e também do Hemisfério Sul) receberá esse importante evento. O site do ICM 2018 já está disponível e pode ser acessado em http://www.icm2018.org/.

Sobre o número 37

Veja o que acontece ao multiplicarmos 37 por múltiplos de 3:

$$3 \times 37 = 111$$
$$6 \times 37 = 222$$
$$9 \times 37 = 333$$
$$12 \times 37 = 444$$
$$15 \times 37 = 555$$
$$18 \times 37 = 666$$
$$21 \times 37 = 777$$
$$24 \times 37 = 888$$
$$27 \times 37 = 999.$$

Quadrado Mágico

Provavelmente você deve conhecer o quadrado mágico

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{array}$$

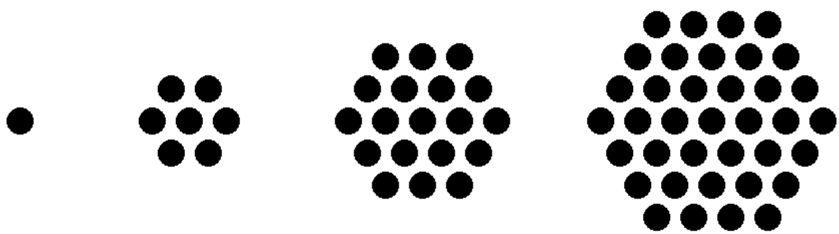
que possui a propriedade de ter a soma de todas as linhas, colunas e diagonais iguais a 15. Pois bem, ele possui mais uma propriedade “quadrada” e “mágica”: se você ler as linhas como números, de trás para frente e vice-versa, e elevá-los ao quadrado, teremos:

$$816^2 + 357^2 + 492^2 = 618^2 + 753^2 + 294^2.$$

Mágica?

Números Hexagonais

Os seguintes números podem ser arranjados em um hexágono, sempre começando com um ponto no centro:



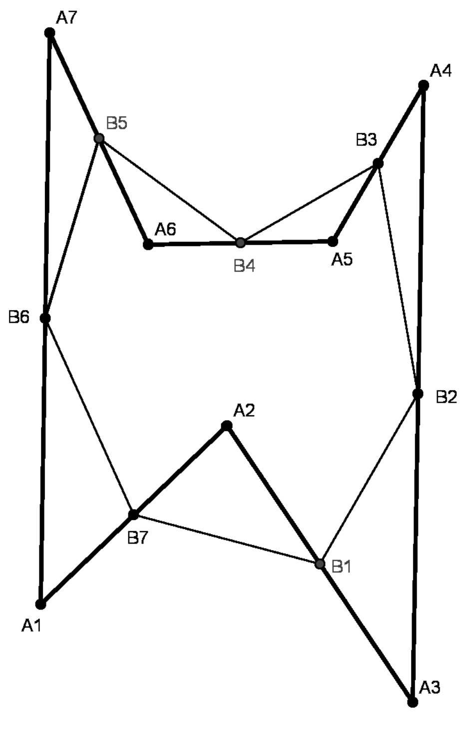
1 **7** **19** **37**

Soluções dos Problemas Propostos

1. (Proposto na Revista da ORM, número 11): A seguinte afirmação é falsa: "Se $A_1, A_2, ..., A_n$ não é um polígono convexo, então o polígono $B_1, B_2, ..., B_n$ sempre é convexo, em que $B_1, B_2, ..., B_n$ são pontos médios de $A_1, A_2, ..., A_n$". Ache um contra-exemplo.

   SOLUÇÃO (apresentada por Sidinei Lindomar da Rocha Junior, aluno de graduação do Curso de Matemática - Licenciatura da UFSC)

   Contra-Exemplo:



   Problema 2

2. (Proposto na Revista da ORM, número 11): Seja $0° < \theta < 90°$. Quem é maior:

1+ tg(θ) ou sen(θ) + cos(θ)?

SOLUÇÃO (apresentada por Ben-Hur Eidt e Gabriel Simon Schafaschek, alunos de graduação do Curso de Matemática - Licenciatura da UFSC)

Sabemos que $1 + tg\theta = 1 + \dfrac{sen\theta}{cos\theta} = \dfrac{cos\theta + sen\theta}{cos\theta}$.

Se tivéssemos $\dfrac{cos\theta + sen\theta}{cos\theta} \leq \dfrac{cos\theta + sen\theta}{1}$, como $cos\theta$ é sempre maior que zero (pois $0 < \theta < 90^{o}$), então $cos\theta + sen\theta \leq (cos\theta + sen\theta)cos\theta \rightarrow 1 \leq cos\theta$, o que é um absurdo, pois $0^{o} < \theta < 90^{o} \rightarrow 1 > cos\theta > 0$.
Assim, temos que $1 + tg\theta = 1 + \dfrac{sen\theta}{cos\theta} > \dfrac{cos\theta + sen\theta}{1} = cos\theta + sen\theta$.
Logo, $1 + tg\theta > cos\theta + sen\theta$.

Problemas Propostos

Convidamos o leitor a enviar soluções dos problemas propostos e a sugerir novos problemas para as próximas edições. As melhores soluções serão publicadas na próxima edição e os autores receberão um exemplar da mesma (Veja "Informações Gerais").

1. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

   Prove que

   $$S = \frac{1}{66}(100)(101)(201)(10099)(3.10^{12}+9.10^{10}+2.10^{8}-11.10^{6}+3.10^{4}+995)$$

   é inteiro.

2. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

   As paredes de uma galeria de arte formam um polígono simples de n lados (regular ou não, convexo ou não). Deseja-se obter o número mínimo de guardas para cuidar da galeria. Os guardas devem ser colocados em locais fixos e só podem mexer a cabeça para vigiar.

   Dê um exemplo de um hexágono tal que $g(6) = \left[\dfrac{6}{3}\right] = 2$ e um exemplo de um undecágono tal que $g(11) = \left[\dfrac{11}{3}\right] = 3$

3. *(Proposto pelo Professor Antônio Vladimir Martins, do Departamento de Matemática da UFSC)*

   Uma das questões da 70ª Competição Matemática William Lowell Putman - EUA (o primeiro lugar recebe 25000 dólares) pede para mostrar que todo racional positivo pode ser escrito como um quociente de fatoriais de primos (não necessariamente distintos). Por exemplo: $\dfrac{7}{8} = \dfrac{7!2!}{3!3!3!5!}$.

   a) Escrever nessa forma os números 11 e $\dfrac{17}{22}$.

   b) “Todo primo pode ser escrito desta forma". $\left(\text{Sugestão: } p = \dfrac{p!}{(p-1)!}\right)$

4. *(Proposto pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, tutor do PET Matemática)*

   Dada um circunferência de raio R encontrar as dimensões do triângulo isósceles inscrito nessa circunferência cuja soma da base com a altura relativa a essa base no triângulo é máxima. Resolver sem usar ferramentas do Cálculo Diferencial.

   (Sugestão: construa inicialmente, com régua e compasso, esse triângulo.)

   (Observação: esse problema está proposto no TCC, em elaboração, do aluno Fábio Brinkmann, para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela UFSC.)

Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática

Premiados da ORM em Olimpíadas de Matemática

Airton José Schmitt Junior - Biguaçu
Medalha de Bronze na 4^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 7^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Amadeo Zimermann - São Pedro de Alcântara
Medalha de Bronze na 3^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 4^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Prata na 5^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 6^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Ana Carolina de Medeiros da Silva - Joinville
Medalha de Bronze na 5^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 6^{a} Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Anderson Negreli - São Bento do Sul
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

André Victória Matias - Criciúma
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Bruno da Silveira Dias - Florianópolis
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)

Bruno Leonardo Schneider - São José
Medalha de Bronze na I Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1998 (Nível 1)
Medalha de Prata na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Menção Honrosa na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Menção Honrosa na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)
Medalha de Prata na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Bruno Mota - Joinville
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Bruno Nunes - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Carlos Bruno Medeiros da Costa Pereira Neto - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Caroline da Silveira - Joinville
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)

Douglas Ohf - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Eduardo Adelano Agostini Pasold - Timbó
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Eduardo José Mendes - Biguaçu
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Eduardo Lennert Rammé - Joinville
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2011 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Elisangela Dornelles - Massaranduba
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Felipe Paupitz Schilichting - Florianópolis
Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 1)
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)

Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)

Fernanda Momm Antunes - Joinville
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Fernando Luiz Alves Lapa - Joinville
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Gabriel Augusto Moreira - Joinville
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Gabriel Machado - Massaranduba
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Gislaine Hoffmann - Antônio Carlos
Medalha de Prata na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Prata na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Giuliano Boava - Criciúma
Medalha de Ouro na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 3)
Medalha de Prata na XXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 1999 (Nível 3)
Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2000
Medalha de Bronze na XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2001

Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2001
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2002
Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária em 2002
Medalha de Bronze na XXV Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2003
Medalha de Bronze (Third Prize) na X Internacional Mathematical Competition for University Students em 2003 - Cluj-Napoca, Romênia
Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2004

Guilherme Rohden Echelmeier - Itajaí
Medalha de Prata na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 2)
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 3)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)

Guilherme Weber Menon - Joinville
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Gustavo Bernardo de Oliveira - Joinville
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Gustavo Lisbôa Empinotti - Florianópolis
Medalha de Prata na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Ouro na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na 13ª Olimpíada de Maio em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIX Olimpíada de Matemática do Cone Sul em 2008 - Temuco, Chile
Medalha de Prata na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na LI Olimpíada Internacional de Matemática em 2010 - Astana, Cazaquistão
Medalha de Bronze na III Romanian Master in Mathematics em 2010
Medalha de Bronze na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2010
Medalha de Prata na 25ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2010 - Assunção, Paraguai
Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na IV Romanian Master in Mathematics em 2011
Medalha de Prata na Asian Pacific Mathematics Olympiad em 2011
Medalha de Bronze na LII Olimpíada Internacional de Matemática em 2011 - Amsterdã, Holanda

Hanna Kurihara e Silva - Florianópolis
Medalha de Bronze na II Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 1999 (Nível 1)
Menção Honrosa na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 1)

Medalha de Bronze na IV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2001 (Nível 2)
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 2)
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)

Helena Carolina Rengel Koch - Jaraguá do Sul
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Ivani Ivanova Ivanova - Blumenau
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Janine Garcia - São Francisco do Sul
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

João Marcos Carnieletto Nicolodi - Florianópolis
Medalha de Ouro na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 1)
Medalha de Ouro na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Julia Almeida Oliveira - Joaçaba
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Júlia Bertelli - Joinville
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2010 (Nível 1)
Medalha de Prata na 17ª Olimpíada de Maio em 2011 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Julia Heck Deters - Itapiranga
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Karina Livramento dos Santos - Navegantes
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Laiane Freitas Suzart - Joinville
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leandro Augusto Lichtenfelz - Blumenau
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 3)
Medalha de Bronze na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2008
Medalha de Prata (Second Prize) na XVI Internacional Mathematical Competition for University Students em 2009 - Budapeste, Hungria

Leandro Jun Kimura - Joinville
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Leandro Roza Livramento - Florianópolis
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)

Leonardo Gonçalves Fischer - Fraiburgo
Medalha de Bronze na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 1)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Leonardo Lennert Rammé - Joinville
Medalha de Bronze na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Leonard Henrrik Wodtke - Joinville
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Letícia Perini - Timbó
Menção Honrosa na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)

Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Lucas Bruno Barbosa Sandoval - Florianópolis
Medalha de Ouro na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 2)
Medalha de Bronze na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 3)

Lucas Lolli Savi - Florianópolis
Medalha de Ouro na III Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2000 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2000 (Nível 2)
Medalha de Bronze na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 3)

Luis Fernando Momm Antunes - Joinville
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Luiz Fernando Bossa - Brusque
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Medalha de Ouro na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Mikhail Zimmer Heidrich - Lages
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 1)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 2)

Natália Deyse Koch - Chapecó
Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 3)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 3)

Natan Cardozo Leal - São Bento do Sul
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 3)
Medalha de Prata na XI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 3)
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 3)

Nicole Braga de Medeiros Nicolak - Joinville
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Bronze na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)
Menção Honrosa na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 2)
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)

Renan Henrique Finder - Joinville
Medalha de Ouro na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)

Medalha de Prata na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)
Medalha de Prata na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2005 (Nível 2)
Medalha de Ouro e Prêmio William Glenn Whitley na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)
Medalha de Ouro na XXVIII Olimpíada Brasileira de Matemática em 2006 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 12ª Olimpíada de Maio em 2006 (Nível 2)
Medalha de Prata na XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2007 (Nível 3)
Medalha de Ouro na XVIII Olimpíada de Matemática do Cone sul em 2007 - Uruguai
Medalha de Prata na XXX Olimpíada Brasileira de Matemática em 2008 (Nível 3)
Medalha de Prata na 23ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2008 - Brasil
Medalha de Prata na 49ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2008 - Madri, Espanha
Medalha de Prata na 50ª Olimpíada Internacional de Matemática em 2009 - Bremen, Alemanha
Medalha de Ouro na 24ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática em 2009 - Santiago de Querétaro, México
Medalha de Ouro na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 3)
Medalha de Ouro na XXXII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2010
Medalha de Ouro na XXXIII Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária em 2011
Medalha de Ouro (First Prize) na XVIII International Mathematics Competition for University Students em 2011
Medalha de Prata na III Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2011 - Quito, Equador
Medalha de Ouro (First Prize) na XIX Internacional Mathematical Competition for University Students em 2012 - Blagoevgrad, Bulgária
Medalha de Ouro na IV Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática em 2012 - Guanajuato, México

Rodrigo Vicente Cercal - Joinville
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)

Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Rogério Hannemann Júnior - Joinville
Menção Honrosa na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005 (Nível 1)
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 2)
Menção Honrosa na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 2)
Menção Honrosa na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 3)

Ruan Victor Soares da Silva - Joinville
Medalha de Prata na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2010 (Nível 1)
Medalha de Ouro na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Shadi Bavar - Blumenau
Medalha de Prata na XII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2009 (Nível 1)
Medalha de Bronze na XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2009 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)

Sidnei Rodrigo Dos Santos - Jaraguá do Sul
Menção Honrosa na 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2006 (Nível 1)
Medalha de Prata na 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2007 (Nível 1)

Medalha de Bronze na 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2008 (Nível 2)
Medalha de Ouro na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 2)
Medalha de Bronze na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 3)

Simon Joel Warkentin - Joinville
Menção Honrosa na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 1)
Menção Honrosa na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 1)

Tiago Madeira - Itajaí
Medalha de Ouro na V Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2002 (Nível 1)
Menção Honrosa na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática em 2002 (Nível 1)
Medalha de Bronze na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 2)
Medalha de Bronze na 9ª Olimpíada de Maio em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 2)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 3)
Medalha de Bronze na 11ª Olimpíada de Maio em 2005 (Nível 2)
Menção Honrosa na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 3)
Medalha de Prata na X Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2007 (Nível 3)

Vitor Costa Fabris - Criciúma
Menção Honrosa na VI Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2003 (Nível 1)
Medalha de Ouro na VII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2004 (Nível 1)

Menção Honrosa na XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática em 2004 (Nível 1)
Menção Honrosa na VIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2005 (Nível 2)
Medalha de Prata na IX Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2006 (Nível 2)

Vitor Probst Curtarelli - Timbó
Menção Honrosa na 5ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2009 (Nível 1)
Medalha de Prata na 6ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2010 (Nível 1)
Menção Honrosa na XIV Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina em 2011 (Nível 2)
Medalha de Prata na 7ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2011 (Nível 2)

Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

As seções de problemas propostos e soluções são seções dinâmicas. Contribua propondo problemas ou enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém, podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o LaTeX, então o artigo deverá ser preferencialmente submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) devem cadastrar suas escolas. O cadastramento para a OBM e ORM é feito somente no site da OBM (www.obm.org.br). Escolas já cadastradas em anos anteriores deverão confirmar a cada novo ano a sua inscrição. Para o cadastramento será necessário o código do Inep da escola. Existe um período para cadastramento ou confirmação. Consulte o site da OBM. No site não aparece a opção para cadastramento na ORM. As escolas cadastradas para a OBM estarão automaticamente cadastradas para a ORM. No cadastramento deve ser indicado o nome de apenas um dos seguintes coordenadores regionais: José Luiz Rosas Pinho ou Licio Hernanes Bezerra).

Alunos interessados em participar das olimpíadas devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberem a revista podem solicitar o envio da mesma.

Além disso, a revista é enviada às universidades federais brasileiras (um exemplar por IES), por intermédio da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer suas dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

– nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
– telefone/Fax: (48) 37214595 (PET Matemática)
– e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
– endereço: PET Matemática
Departamento de Matemática - CFM
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC