Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina

Nº1, 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor: Rodolfo Joaquim Pinto da Luz
Vice-Reitor: Lúcio José Botelho

PRÓ-REITORIA DE CULTURA E EXTENSÃO - PRCE

Pró-Reitora: Denise Maria Guerreiro Vieira da Silva

DEPARTAMENTO DE APOIO À EXTENSÃO - DAEx

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM

Diretor: Ivan Gonçalves de Souza
Vice-Diretor: Méricles Thadeu Moretti

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Chefe: Nereu Estanislau Burin
Sub-Chefe: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Apoio:

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO-CNPq

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM

CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO PELA BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina/
Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas.– n.1 (2004) – . – Florianópolis:[s.n],
2004 -
v.: 23 cm

Anual
ISSN 1679-7612

1. Matemática – Competições. 2. Matemática – Questões, Problemas, exercícios. I. Universidade Federal de Santa Catarina. II Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.

Editoração Eletrônica:
Alda Dayana Mattos
Rodrigo Maciel Rosa

Tiragem:
700 exemplares

Arte da Capa:
Renata Leandro Becker

Postagem:
Segundo Semestre de 2003.

Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina N.º 1, 2004

ISSN 1679-7612

Sumário

Apresentação 7

I ORM (1998) 9

Provas . . . 11
- Nível 1 . . . 11
- Nível 2 . . . 12
- Nível 3 . . . 13

Soluções . . . 14
- Nível 1 . . . 14
- Nível 2 . . . 17
- Nível 3 . . . 21

Premiados . . . 26
- Nível 1 . . . 26
- Nível 2 . . . 27
- Nível 3 . . . 27

Escolas Participantes . . . 29

II ORM (1999) 31

Problemas . . . 33
- Nível 1 . . . 33
- Nível 2 . . . 35
- Nível 3 . . . 37

Soluções . . . 39
- Nível 1 . . . 39
- Nível 2 . . . 41
- Nível 3 . . . 43

Premiados . . . 48
- Nível 1 . . . 48
- Nível 2 . . . 49
- Nível 3 . . . 50

Escolas Participantes . . . 52

III ORM (2000) **53**
Problemas 55
Nível 1 55
Nível 2 57
Nível 3 59
Soluções 60
Nível 1 60
Nível 2 63
Nível 3 66
Premiados 72
Nível 1 72
Nível 2 73
Nível 3 74
Escolas Participantes 75

Artigo **77**

Euclides, Hilbert e o Rigor em Geometria
Eliezer Batista 79

Problemas Propostos **97**

Outras Olimpíadas **101**

Informações Gerais **107**
Envio de Problemas e Soluções 109
Envio de Artigos 109
Cadastramento 109
Como adquirir a revista 109
Fale Conosco 110

Apresentação

Esta revista é, de certa forma, o resultado do trabalho que vem sendo feito, desde 1998, por uma equipe formada por alunos do Curso de Matemática e por professores do Departamento de Matemática da UFSC, para a realização da *Olimpíada Regional de Matemática* (ORM) de Santa Catarina. Participam dessa equipe os alunos bolsistas do PET – Matemática (Programa Especial de Treinamento – SESu/MEC), alunos com bolsa de projeto de extensão (PRCE – DAEx) e alunos voluntários, além de 7 professores daquele departamento, formando a Comissão Regional das Olimpíadas de Matemática.

O principal objetivo desta revista é divulgar a ORM e, paralelamente, divulgar a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) em todo o Estado de Santa Catarina. A revista estará sendo distribuída a todas as escolas que vêm participando da ORM e, principalmente para outras escolas que ainda não participam e possam vir a se interessar pelas olimpíadas. Além disso, ela estará sendo enviada para outras instituições de ensino superior de Santa Catarina e de outros Estados, grupos PET – Matemática do país, e alunos do Curso de Matemática da UFSC.

Apresentamos neste primeiro número as provas da segunda fase da ORM dos anos 1998,1999 e 2000, com soluções dos problemas, listas de escolas participantes e estudantes premiados. As provas de 2001, 2002 e 2003 ficarão para o próximo número. No artigo aqui publicado o professor Eliezer Batista, da Comissão Regional, discorre sobre alguns aspectos da geometria euclidiana do ponto de vista axiomático comparando a formulação dada por Euclides nos "Elementos", e a visão moderna de Hilbert. Constam ainda desta revista uma seção de problemas propostos e algumas curiosidades matemáticas. Convidamos os leitores, professores das escolas de ensino fundamental e médio, alunos e professores dos cursos de matemática das instituições de ensino superior, a contribuir com a seção de problemas propostos, enviar soluções e a submeter artigos, que serão analisados pela comissão editorial. Convidamos também professores, coordenadores e diretores das escolas que ainda não participam das olimpíadas a se motivar e a motivar seus alunos a participar destas competições. As olimpíadas de matemática não são competições entre escolas mas uma saudável competição entre indivíduos. Os problemas olímpicos de matemática são os melhores exemplos, em seu nível, de como deve ser encarada a matemática: desafiadora, exigindo criatividade e imaginação, e também divertida. As escolas interessadas em se cadastrar para a ORM de 2004 podem enviar uma cópia preenchida da ficha de cadastro, que se encontra no final da revista, para nosso endereço.

Agradecemos à Pró-Reitoria de Cultura e Extensão (PRCE) que, através do seu Departamento de Apoio à Extensão (DAEx) financiou esta publicação como um projeto de extensão do programa PROEXTENSÃO, bem como à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Agradecemos ainda a todos aqueles que contribuíram com entusiasmo para que esta revista pudesse ser de fato realizada, em particular, a todos os alunos do Curso de Matemática da UFSC, bolsistas do PET – Matemática e de extensão, e voluntários.

Florianópolis, 20 de outubro de 2003.

José Luiz Rosas Pinho
Coordenador das Olimpíadas de Matemática de Santa Catarina

I ORM (1998)

Provas

Nível 1

1. Foram usados 807 algarismos para numerar todas as páginas de um livro. Quantas páginas tem o livro?

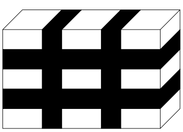
2. Seu amigo lhe deve 25 centavos e pretende pagá-lo com moedas de 1 centavo, 5 centavos e 10 centavos. De quantas maneiras ele pode fazer o pagamento?

3. Quantos são os números (escritos no sistema decimal de numeração) com três algarismos distintos, com a propriedade que os algarismos a das centenas e b das dezenas satisfazem a relação $a - b = 1$.

4. Num sorteio com números de 100 a 999, alguns cartões numerados devem ser marcados para não dar margem a dúvidas; por exemplo o 696, que lido de cabeça para baixo é ainda um número, 969. Quantos são os cartões numerados que devem ser marcados?

5. Quais são as possibilidades para o algarismo das unidades do número $x^4 + 3^{1998}$, com x um número inteiro?

6. Você deseja amarrar 140 caixas com fitas, como mostra a figura abaixo. Cada caixa tem 65 cm de comprimento, 25 cm de largura e 10 cm de altura. Quantos metros de fita são necessários, admitindo uma sobra de 5 cm por caixa?



Nível 2

1. Quais são as possibilidades para o algarismo das unidades do número $x^4 + 3^{1998}$, com x um número inteiro?

2. Quantas soluções tem a equação $x + y + z = n$ com x, y e z inteiros positivos e n fixo?

3. Mostre que o número a^n com a e n inteiros e $n \geq 3$ pode ser escrito como a diferença de dois quadrados de números inteiros.

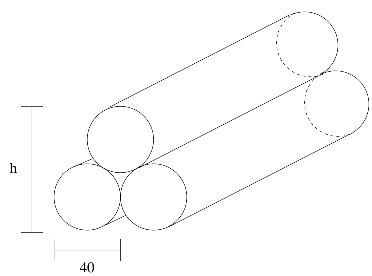
4. Um estudante durante os seus dias de férias observou que:

   (a) Choveu 7 vezes, pela manhã ou de tarde.
   (b) Quando choveu de tarde, a manhã foi ensolarada.
   (c) Houve 5 tardes sem chuva.
   (d) Houve 6 manhãs de sol.

   Quantos dias o estudante esteve de férias?

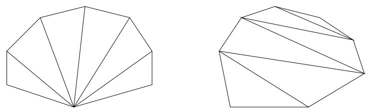
5. Um cheque é escrito no valor de x reais e y centavos, ambos números de dois algarismos. Por engano, na ocasião do recebimento, é pago o valor de y reais e x centavos, aumentando de R$ 17,82 o valor correto. Quais são os possíveis valores do cheque?

6. Dois lingotes cilíndricos são colocados lado a lado de modo a se encostarem ao longo de sua extensão. Um terceiro é colocado sobre os dois. Qual é a altura h da pilha, se o diâmetro de cada lingote mede 40 mm?



Nível 3

1. Existem diversas maneiras de se dividir um polígono convexo de n lados em triângulos, através de diagonais que não se cruzam no interior do polígono. Por exemplo:



Mostre que o número de triângulos obtidos e o números de diagonais envolvidos nesta decomposição independem da maneira como o polígono é dividido e calcule estes números em função de n.

2. Entre os inteiros 1 à 10.000.000.000 qual das duas é maior: a quantidade daqueles números que possuem pelo menos um algarismo 1, ou a quantidade de números que não possuem nenhum algarismo 1?

3. (a) Prove que qualquer polígono convexo de área 1 está contido em um paralelogramo de área 2.

   (b) Prove que um triângulo de área 1 não pode estar contido em um paralelogramo de área menor que 2.

4. Mostre que se dobrarmos o número de lados de um polígono regular e mantivermos o perímetro, então a área aumenta. Qual valor, em função do perímetro fixado, que não é ultrapassado pelas áreas dos polígonos, se formos dobrando sucessivamente o número de lados?

5. Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que satisfaz $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, y em $\mathbb{R}$. Calcule $f(10)$.

6. Dois homens movimentam-se um em direção ao outro a partir de dois pontos m e n distantes 117 km. O primeiro homem caminha a uma velocidade constante de 4 km/h. O segundo homem caminha a 2 Km/h durante a primeira hora, a 2,5 Km/h durante a segunda hora, a 3 Km/h durante a terceira hora, e assim por diante. Quando eles irão se encontrar?

Soluções

Nível 1

1. De 1 até 9 teremos 1 algarismo para cada número.
   De 10 até 99 teremos 2 algarismos para cada número.
   De 100 até 999 termos 3 algarismos para cada número.
   De 1 até 9 temos 9 números, portanto 9 algarismos. Logo $807 - 9 = 798$.
   De 10 até 99 temos 90 números, portanto 180 algarismos. Logo $798 - 180 = 618$.
   De 100 até 999 temos 900 números, portanto 2700 algarismos.
   Logo, podemos concluir que o número total de páginas está entre 100 e 999.
   De 100 até 199 temos 100 números, portanto 300 algarismos. Logo $618 - 300 = 318$.
   De 200 até 299 temos 100 números, portanto 300 algarismos. Logo $318 - 300 = 18$
   De 300 até 305 temos 6 números, portanto 18 algarismos.
   Logo o livro tem 305 páginas.

2. Começando com as moedas de 1 centavo, obtemos as seguintes possibilidades:
   5 moedas de 1 centavo - 2 moedas de 5 centavos - 1 moeda de 10 centavos
   5 moedas de 1 centavo - 4 moedas de 5 centavos
   5 moedas de 1 centavo - 2 moedas de 10 centavos
   10 moedas de 1 centavo - 1 moeda de 5 centavos - 1 moeda de 10 centavos
   10 moedas de 1 centavo - 3 moedas de 5 centavos
   15 moedas de 1 centavo - 2 moedas de 5 centavos
   15 moedas de 1 centavo - 1 moeda de 10 centavos
   20 moedas de 1 centavo - 1 moeda de 5 centavos
   25 moedas de 1 centavo.
   Começando agora com moedas de 5 centavos e excluindo as possibilidades anteriores, obtemos:
   1 moeda de 5 centavos - 2 moedas de 10 centavos
   3 moedas de 5 centavos - 1 moeda de 10 centavos
   5 moedas de 10 centavos
   Portanto temos 12 possibilidades.

3. Seja um número de três algarismos abc (a representa o algarismo das

centenas, b o algarismo das dezenas e c o algarismo das unidades), onde $a - b = 1$.
Logo $a = b + 1$, portanto a e b são números consecutivos com $a > b$. Nessas condições tem-se 9 possibilidades para dispor os algarismos a e b, são elas: $98\underline{c}$, $87\underline{c}$, $76\underline{c}$, $65\underline{c}$, $54\underline{c}$, $43\underline{c}$, $32\underline{c}$, $21\underline{c}$ e $10\underline{c}$.
Levando em consideração que os algarismos do número devem ser distintos, as possibilidades para o algarismo $\underline{c}$ (das unidades) são 8 para cada uma das 9 possibilidades anteriormente citadas. Desta forma tem-se: $9 \cdot 8 = 72$ possibilidades.

4. Os números que podem produzir soluções ambíguas são aqueles que possuem apenas os algarismos 0, 6 e 9, contudo o 0 (zero) só pode assumir a posição das dezenas, pois se assumir a posição das centenas o número não estará entre 100 e 999. Caso assuma a posição das unidades e os outros algarismos sendo, por exemplo, 6 e 9 e a carta não estivesse marcada, o número não estaria entre 100 e 999 se lido de cabeça para baixo. Desta forma tem-se duas possibilidades para a casa das centenas (6 e 9), três possibilidades para a casa das dezenas (0, 6 e 9) e duas possibilidades para a casa das unidades (6 e 9). Logo tem-se: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ cartões.

5. Vejamos inicialmente quais são as possibilidades para o algarismo das unidades para um número da forma 3^n, para n natural:

   $3^0 = \underline{1}$, $3^1 = \underline{3}$, $3^2 = \underline{9}$, $3^3 = 2\underline{7}$, $3^4 = 8\underline{1}$, $3^5 = 24\underline{3}$, $3^6 = 72\underline{9}$, $3^7 = 218\underline{7}$, $3^8 = 656\underline{1}$, $3^9 = 1968\underline{3}$ e $3^{10} = 5904\underline{9}$.

   Podemos observar que o expoente do 3 pode ser da forma:
   $4k \longrightarrow$ algarismo 1 no final, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$
   $4k + 1 \longrightarrow$ algarismo 3, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$
   $4k + 2 \longrightarrow$ algarismo 9, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$
   $4k + 3 \longrightarrow$ algarismo 7, $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

   Mas $1998 = 4 \cdot 499 + 2$, logo 3^{1998} tem 9 no algarismo das unidades.

   Vejamos agora as possibilidades para o algarismo das unidades para x^4, $x \in \mathbb{Z}$:

   $0^4 = \underline{0}$, $1^4 = \underline{1}$, $2^4 = 1\underline{6}$, $3^4 = 8\underline{1}$, $4^4 = 25\underline{6}$, $5^4 = 52\underline{5}$, $6^4 = 129\underline{6}$, $7^4 = 240\underline{1}$, $8^4 = 409\underline{6}$, $9^4 = 656\underline{1}$, $10^4 = 1000\underline{0}$ e $11^4 = 1464\underline{1}$.

As possibilidades para o algarismo das unidades para um número x^4, $x \in \mathbb{Z}$ será 0, 1, 5 ou 6.
Portanto o número $x^4 + 3^{1998}$ terá como possibilidade para o algarismo das unidades, os algarismos, 0, 4, 5 ou 9.

6. As fitas que são amarradas no comprimento da caixa tem $2(65cm+10cm)$ de comprimento.
   As fitas que são amarradas na largura da caixa tem $2(25cm + 10cm)$ de comprimento.
   No total para amarrar uma caixa, usamos 2 fitas do comprimento e 2 fitas da largura da caixa. Sendo então:

$$2(150cm + 70cm) = 300cm + 140cm = 440cm$$

   Como temos que dar uma folga de 5 cm para a fita, teremos 445 cm para amarrar uma caixa.
   Portanto para amarrar 140 caixas usaremos $(140 \cdot 4,45m) = 623m$.

Nível 2

1. Ver solução do problema 5 do nível 1.

2. Fixando-se $x = 1$ temos:

$x =$	1	1	1	$\dots$	1
$y =$	1	2	3	$\dots$	$n-2$
$z =$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$\dots$	$n-(n-1)$
n	n	n	n	$\dots$	n

Obtemos assim, $n - 2$ soluções.
Fixando-se $x = 2$ temos:

$x =$	2	2	2	$\dots$	2
$y =$	1	2	3	$\dots$	$n-3$
$z =$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	$\dots$	$n-(n-1)$
n	n	n	n	$\dots$	n

Obtemos assim, $n - 3$ soluções.
Fixando-se sucessivamente valores para x, até $x = n - 2$, temos:

$x =$	$n-2$
$y =$	1
$z =$	1
n	n

Obtemos, assim, 1 solução.
(Observe que x não pode ser nem $(n - 1)$, nem n, pois caso contrário, y ou z seria 0, e isso contradiz o fato de x, y e z serem inteiros positivos)
Portanto o número de soluções é: $(n - 2) + (n - 3) + \ldots + 2 + 1$ ou seja, a soma de uma Progressão Aritmética de $(n - 2)$ termos e razão 1: $1, 2, \ldots, (n - 3), (n - 2)$ Logo : $S = \frac{(1+(n-2))(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$
Obs: Os alunos que não estudaram ainda progressão aritmética podem achar a soma S escrevendo:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) \quad (1)$$

$$S = (n-2) + (n-3) + (n-4) + \cdots + 1 \quad (2)$$

Somando (1) e (2) obtemos:

$$2S = (n-1) + (n-1) + (n-1) + \cdots + (n-1) = (n-2)(n-1)$$

Daí:

$$S = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

3. Queremos mostrar que se a e n são inteiros e $n \geq 3$ então $a^n = x^2 - y^2$ para x e y inteiros.

   Agora, $x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$ e $a^n = a^{n-1} \cdot a$.

   Tomemos $x + y = a^{n-1}$ e $x - y = a$, então: $x = a + y$

   $\Rightarrow\ a + y + y = a^{n-1}\ \Rightarrow\ 2y = a^{n-1} - a\ \Rightarrow\ y = \dfrac{a^{n-1} - a}{2}$

   $x = a + y\ \Rightarrow\ x = a + \frac{a^{n-1}-a}{2}\ \Rightarrow\ x = \dfrac{a^{n-1} + a}{2}$

   Encontramos x e y , tal que $a^n = x^2 - y^2$, basta mostrar agora que x e y são números inteiros:

   Como a e n são inteiros então $a^{n-1} - a$ e $a^{n-1} + a$ são inteiros, basta mostrar agora que $a^{n-1} - a$ e $a^{n-1} + a$ são divisíveis por 2.

   Consideremos primeiramente $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja a um número par, então: a^{n-1} é par e como a é par temos que $a^{n-1} - a$ e $a^{n-1} + a$ são pares, logo são divisíveis por 2.

   Consideremos agora $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja a um número ímpar, então: a^{n-1} é ímpar e como a é ímpar temos que $a^{n-1} - a$ e $a^{n-1} + a$ são pares, logo são divisíveis por 2.

   Obs: Note que para $n = 2$ e $a = 2$ o problema só tem a solução $y = 0$ e $x = 2$.

4. Por (a) temos que choveu exatamente 7 vezes pela manhã ou pela tarde, mas pelo item (b) concluímos que se choveu durante a tarde, só pode ter tido dia de sol pela manhã, restando as condições de um dia todo ensolarado e o de manhã chuvosa e tarde com sol.
   Iniciaremos a resolução do problema, usando o pressuposto de (a), supondo que choveu em 7 tardes, o que nos leva a concluir por (b), que ocorreram 7 manhãs de sol. Mas isto entra em contradição com o item

(d).
Suponhamos então, que choveu em 6 tardes e em 1 manhã. De (b) teremos 6 manhãs de sol e de (c) teremos 5 tardes sem chuva, somando 11 dias. Porém destas 5 tardes sem chuva, em 1 manhã choveu e nas outras 4 manhãs fez sol, totalizando 10 manhãs de sol, o que contradiz o item (d).
Suponhamos então, que choveu em 5 tardes e em 2 manhãs. De (b) teremos 5 manhãs de sol e de (c) teremos 5 tardes sem chuva, somando 10 dias. Porém destas 5 tardes sem chuva, em 2 manhãs choveu e nas outras 3 manhãs fez sol, totalizando 8 manhãs de sol, o que contradiz o item (d).
Suponhamos então, que choveu em 4 tardes e em 3 manhãs. De (b) teremos 4 manhãs de sol e de (c) teremos 5 tardes sem chuva, somando 9 dias. Porém destas 5 tardes sem chuva, em 3 manhãs choveu e nas outras 2 manhãs fez sol, totalizando 6 manhãs de sol. Portanto o estudante teve 9 dias de férias (as outras possibilidades também levam a contradições).

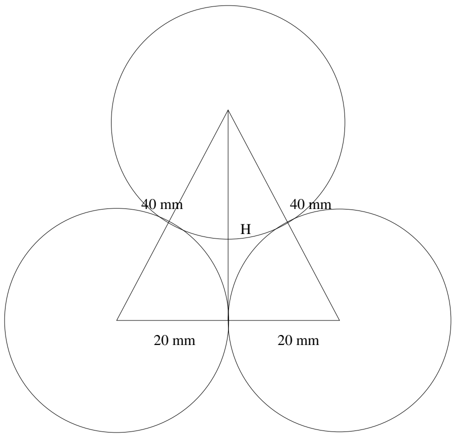
5. x reais e y centavos $= x + \dfrac{y}{100}$ e y reais e x centavos $= y + \dfrac{x}{100}$, então:
$\left(y + \dfrac{x}{100}\right) - \left(x + \dfrac{y}{100}\right) = 17{,}82 \Rightarrow 99y - 99x = 1782 \Rightarrow y - x = 18$
$\Rightarrow y = x + 18$ mas $10 \leq x \leq 99$ e $10 \leq y \leq 99$, pois x e y são números de 2 algarismos, portanto:

se $x \geq 10$ então $y \geq 28$ e se $y \leq 99$ então $x \leq 99 - 18 = 81$ ou seja, $10 \leq x \leq 81$ e $28 \leq y \leq 99$.

6. Quando as circunferências são tangentes os raios das circunferências e o ponto de tangência são colineares. Como os três cilindros têm mesmo raio, o triângulo formado pelos centros das circunferências é equilátero.
Sabendo a medida do raio, através do Teorema de Pitágoras encontramos a altura H do do triângulo.
$H^2 + 20^2 = 40^2 \Rightarrow H^2 = 40^2 - 20^2 \Rightarrow H^2 = (2^2 \cdot 20^2) - 20^2 \Rightarrow H^2 = 20^2(2^2 - 1) \Rightarrow H^2 = 20^2 \cdot 3 \Rightarrow H = 20\sqrt{3}$

A altura da pilha será a soma de 2 raios com a altura H do triângulo:

$$h = 40 + 20\sqrt{3} = 20(2+\sqrt{3}) \Rightarrow h = 20(2+\sqrt{3})mm$$



Nível 3

1. A soma dos ângulos internos dos triângulos obtidos será sempre igual a soma dos ângulos internos do polígono convexo, que é igual a $180^o(n-2)$, pois os vértices dos triângulos são os vértices do polígono.
   Portanto, o número de triângulos obtidos deve ser constante, (já que as diagonais não se cruzam) e igual a $n-2$.
   Este número de triângulos possui um total de $3(n-2)$ lados, onde n são os lados do polígono e cada diagonal é contada duas vezes. Portanto o número d de diagonais será constante e é dado por:

   $$3(n-2) = n+2d \Longrightarrow 2d = 3n-6-n = 2n-6 = 2(n-3) \Longrightarrow d = (n-3)$$

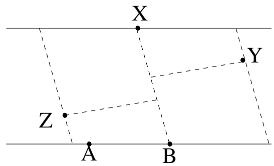
2. Para achar a quantidade de números que não possuem o algarismo 1, basta arranjar os números de forma a ter 9 possíveis algarismos na casa das unidades, 9 possíveis na casa das dezenas etc. Chegando assim a $9^{10} - 1 \approx 9^{10}$ (Subtrair 1 porque excluímos o número zero).

   Observe agora que: $9^2 = 81, 9^3 = 729, 9^4 = 6561, 9^5 = 59949, 9^6 = 539541 < 53 \times 10^4, 9^7 < 477 \times 10^4 < 5 \times 10^6, 9^8 < 5 \times 10^7, 9^9 < 5 \times 10^8, 9^{10} < 5 \times 10^9 = \dfrac{10 \times 10^9}{2} = \dfrac{10^{10}}{2}$ metade dos números.

   O que nos diz que a quantidade de números sem qualquer algarismo 1 é menor do que a quantidade de números que possuem algum algarismo 1. (este número é: $10^{10} - 9^{10} + 1$)

3. (a) Escolhamos um lado qualquer do polígono que chamaremos de AB (então o polígono está contido em um único semiplano determinado pela reta que passa por A e B, pois é convexo). Seja X um vértice do polígono que está à maior distância de AB (pode haver no máximo mais um vértice, formando com X outro lado do polígono, paralelo à AB).

   Unamos X a um dos vértices A ou B, digamos B, e tomemos os vértices de um lado e de outro de BX (que pode ser diagonal do polígono ou um lado) que estão à maior distância de BX por cada lado (se não existir nenhum vértice à maior distância de BX por um dos lados, então BX é lado do polígono). Tracemos por X uma paralela à AB e por cada vértice encontrado por último, digamos Y e Z uma paralela à BX. Forma-se assim um paralelogramo que contém o polígono convexo.



Agora, os triângulos BXY e BXZ estão contidos no polígono (pois este é convexo) e a soma de suas áreas é:

$$\frac{\overline{Bx} \cdot h_z}{2} + \frac{\overline{Bx} \cdot h_y}{2} = \frac{\overline{Bx} \cdot (h_z + h_y)}{2} = \frac{\text{Área do paralelogramo}}{2}$$

Mas $\frac{\overline{Bx} \cdot (h_z + h_y)}{2} \leq$ Área do polígono $= 1$
Segue-se que área do paralelogramo ≤ 2.
Se a área do paralelogramo for menor do que 2 basta ampliá-la um pouco para obtermos a área 2.

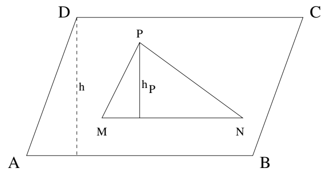
(b) Considere um paralelogramo$ABCD$ qualquer de área menor do que 2. Vamos mostrar que ele não pode conter nenhum triângulo de área igual ou maior do que 1.
Suponha inicialmente que um triângulo qualquer contido em $ABCD$, digamos MNP, tenha um de seus lados paralelos a um dos lados do paralelogramo (digamos $MN//AB$). Então

$$\overline{MN} \leq \overline{AB}$$

e a altura h_P do triângulo, relativa ao lado MN, portanto de P, é menor ou igual à altura h do paralelogramo, em relação a AB.
Então

$$A_{MNP} = \frac{\overline{MN} \cdot h_P}{2} \leq \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} < \frac{2}{2} = 1$$

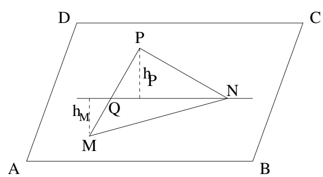
Suponha agora que o triângulo MNP não tenha nenhum lado paralelo a qualquer dos lados de $ABCD$. Neste caso é possível traçar



por um dos vértices do triângulo uma paralela a um dos lados do paralelogramo de tal modo que cruze o lado oposto a este vértice, dividindo o triângulo em dois. Suponha que por N, a paralela a AB cruze o lado MP em Q.

Então

$$\begin{aligned} A_{MNP} &= A_{MQN} + A_{PQN} = \frac{\overline{QN} \cdot h_P}{2} + \frac{\overline{QN} \cdot h_M}{2} \\ &= \frac{\overline{QN} \cdot (h_P + h_M)}{2} \leq \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} < \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$



4. Considere um polígono regular de n lados com perímetro $2p$.

   Seja θ o ângulo central relativo a um lado do polígono: $\theta = \dfrac{360^{\mathrm{o}}}{n}$.

   Seja $L = \dfrac{2p}{n}$ (ver Figura 1).

   A área do triângulo formado pelo lado com vértice no centro do polígono é: $A_\Delta = \dfrac{\frac{2p}{n} \cdot h}{2} = \dfrac{p}{n} \cdot h$ onde $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\frac{2p}{n}/2}{h}$ ou $h = \dfrac{\frac{p}{n}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = \dfrac{p}{n \cdot \operatorname{tg}\dfrac{180^{\mathrm{o}}}{n}}$.

   Assim, $A_\Delta = \dfrac{p^2}{n^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180^{\mathrm{o}}}{n}}$ e a área do polígono será: $A_n = n \cdot A_\Delta =$

$\dfrac{p^2}{n \cdot \text{tg}\frac{180^o}{n}}$.

Seja agora o polígono regular de $2n$ lados e perímetro $2p$.

Seja $L' = \dfrac{2p}{2n} = \dfrac{p}{n}$ (ver Figura 2).

$$\theta' = \frac{360^o}{2n} = \frac{180^o}{n} \Rightarrow \frac{\theta'}{2} = \frac{90^o}{n}$$

$$A_\Delta = \frac{\frac{p}{n} \cdot h'}{2} = \frac{p}{2n} \cdot h'$$

onde

$$\text{tg}\frac{\theta'}{2} = \frac{p/2n}{h'} \Rightarrow h' = \frac{p}{2n \cdot \text{tg}\frac{90^o}{n}}$$

$$A_\Delta = \frac{p^2}{4n^2 \cdot \text{tg}\frac{90^o}{n}}$$

$$A_{2n} = \frac{p^2}{2n \cdot \text{tg}\frac{90^o}{n}}$$

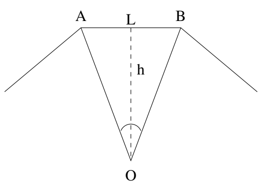


Figura 1

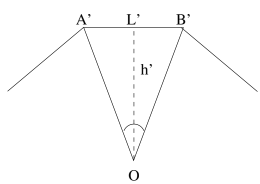


Figura 2

Agora, $\text{tg}2\alpha = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$ assim, $\text{tg}\dfrac{180^o}{n} = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\frac{90^o}{n}}{1 - \text{tg}^2\frac{90^o}{n}}$.

Então: $A_n = \dfrac{p^2}{2n \cdot \text{tg}\frac{90^o}{n}} \cdot (1 - \text{tg}^2\frac{90^o}{n})$. Mas, para $n > 2$, $\frac{90^o}{n} < 45^o$.

Então $0 < \text{tg}\frac{90^o}{n} < 1$.

Assim, $0 < 1 - \text{tg}^2\frac{90^o}{n} < 1$. Segue-se que $A_n < A_{2n}$. Os polígonos aproximam-se do círculo de perímetro $2p$, ou $2\pi r = 2p \Rightarrow r = \dfrac{p}{\pi}$ cuja área é: $\pi r^2 = \pi \cdot \dfrac{p^2}{\pi^2} = \dfrac{p^2}{\pi} = \dfrac{(2p)^2}{4\pi}$. Este é o valor do qual as áreas não excederão.

5.

$$f(0) = f(0 \cdot 0) = f(0) + f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$$
$$0 = f(0) = f(10 \cdot 0) = f(10) + f(0) \;\Rightarrow\; f(10) = 0$$

ou:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$
$$f(0) = f(0 \cdot y) = f(0) + f(y) \;\Rightarrow\; f(y) = 0, \forall y$$
$$f(10) = 0$$

6. Seja n o número inteiro de horas que cada um caminhará. Se eles se encontrarem após essas n horas então:
1°anda:$4n$ Km

2°anda:
$2 + \left(2 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(2 + 2 \cdot \dfrac{1}{2}\right) + \ldots + \left(2 + (n-1) \cdot \dfrac{1}{2}\right)$

$= 2n + \left(\dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} + \ldots + (n-1) \cdot \dfrac{1}{2}\right) = 2n + \dfrac{\left(\dfrac{1}{2} + (n-1) \cdot \dfrac{1}{2}\right)(n-1)}{2}$

$= 2n + \dfrac{n \cdot (n-1)}{4} = \dfrac{n^2 + 7n}{4}$

Assim,$4n + \dfrac{n^2 + 7n}{4} = 117$ ou $n^2 + 23n - 468 = 0$. Note que $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 = 36 \cdot 13$ e $36 - 13 = 23$. Raízes: -36 e 13. Logo, eles se encontrarão após 13 horas.

OBS: Se as raízes não fossem inteiros positivos, então tomaríamos o número inteiro de horas e haveria uma fração de hora que seria calculada de acordo com a velocidade constante de cada um.

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por tipo de medalha)

Nível 1

Ouro

- Ari S. Anselmo Junior (Centro Educacional Visão)
- Leonardo B. Brandão (Educandário Imaculada Conceição)

Prata

- Daniel M. Vieira (Educandário Imaculada Conceição)
- Juliana de Abreu (Colégio Aderbal Ramos da Silva)
- Rodrigo da Silva Cardoso (Colégio Dom Jaime Câmara)

Bronze

- Bruno Leonardo Schneider (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Carina S. Herzmann (Educandário Imaculada Conceição)
- Diego M. da Silva (Colégio Aderbal Ramos da Silva)
- Douglas K. L. Ugochi (Educandário Imaculada Conceição)
- Guilherme Sada Ramos (Educandário Imaculada Conceição)
- Isabel Cristina Hammes (Educandário Imaculada Conceição)
- Martin A. do Nascimento (Educandário Imaculada Conceição)
- Rafael S. Ramos (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Rafael Steinwandter (Educandário Imaculada Conceição)
- Tiago Santos (Educandário Imaculada Conceição)

Nível 2

Ouro

- Elisa M. Moser (Colégio Catarinense)
- Ricardo Andrade (Colégio Catarinense)

Prata

- Alexandre K. Bez (Colégio Coração de Jesus)
- Cristiane da Rosa Pereira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Gabriel de Freitas Camacho (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Mariane Martins (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Rodolfo E. Schneider (Colégio Dom Jaime Câmara)

Bronze

- Andréia Morales Cascaes (Centro Educacional Visão)
- Caroline Louise B. Lohn (Colégio Coração de Jesus)
- Mariá Ghizoni Vieira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Mateus de Andrade Medeiros (Centro Educacional Visão)
- Wagner Barbosa de Medeiros Junior (Centro Educacional Visão)

Nível 3

Ouro

- Gilles G. de Castro (Curso e Colégio Energia)

Prata

- Almir J. Miguel Junior (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Gustavo L. Panissa (Centro Educacional Visão)

- Rafael A. Espíndola (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Vinícius de Espíndola (Centro Educacional Visão)

Bronze

- Alice B. Müller (Centro Educacional Visão)
- Anelise L. Souza (Curso e Colégio Energia)
- Anna Maria B. Passos (Centro Educacional Visão)
- Cristina Mondardo (Colégio Coração de Jesus)
- Dionísio F. Pegoretti (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Fernanda E. Silveira (Curso e Colégio Energia)
- Luis Carlos B. K. Lassance (Curso e Colégio Energia)

Menção Honrosa

- Alessandre Oliveira Pires (Centro Educacional Visão)
- Leandro José Brüggmann (Centro Educacional Visão)

Escolas Participantes

1. Centro Educacional Visão (São José)
2. Colégio Aderbal Ramos da Silva (Florianópolis)
3. Colégio Catarinense (Florianópolis)
4. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)
5. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
6. Colégio Energia (Florianópolis)
7. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)

Você Sabia? 1729 é o menor número que pode ser expresso pela soma de dois cubos de maneiras distintas: $9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$

II ORM (1999)

Problemas

Nível 1

1. Os alunos de uma escola resolveram inventar uma bandeira para seu time de futebol. Depois de muita discussão todos concordam que a bandeira teria o formato abaixo(Fig.1) e as cores seriam branco, azul e verde. No centro do círculo menor seria colocado o símbolo do time e no pequeno retângulo no canto direito o nome da escola. Se duas regiões que se encostam não podem ter a mesma cor, de quantas maneiras eles podem escolher a disposição das cores? OBS: O símbolo e o nome são considerados “regiões”.

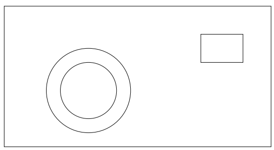


Figura 1

2. Encontre três frações que satisfaçam as seguintes condições:

   (a) A soma das três frações é 1.

   (b) Se substituirmos um delas por $\dfrac{7}{6}$ a nova soma será 2.

3. Uma fábrica produz conjuntos para cozinha formados por 1 mesa e 4 bancos. Cada mesa é montada usando-se 4 pés e um tampo. Num turno de trabalho um operário fabrica 3 tampos ou 16 pés de mesa ou 8 bancos. Perguntas: Quantos operários devem trabalhar em cada uma das tarefas (tampos, pés de mesa e bancos) de maneira a se ter no final do turno um número inteiro de conjuntos completos sem sobra de peça? Quantos conjuntos são fabricados no final do turno?

4. Temos 1999 peças no formato da figura abaixo (Fig.2) e desejamos fazer o maior quadrado possível, sem buracos ou superposições. Quantas peças sobram?

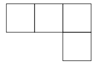


Figura 2

5. Um homem deve cruzar a pé uma ponte estreita que suporta trilhos de trem em uma única direção. Após ter caminhado $\frac{2}{3}$ do comprimento da ponte ele vê à sua frente um trem vindo em sua direção a uma velocidade de 45 km/h. Correndo tanto para frente quanto para trás, com a mesma velocidade, ele consegue escapar no último instante antes de ser esmagado pelo trem. Com que velocidade ele deve correr?

Nível 2

1. Dois números naturais são tais que a diferença de seus quadrados é 37. Quais são os números?

2. João foi à loja de produtos agrícolas comprar animais para o sítio de seu pai. Para comprar os animais seu pai lhe deu R$ 100,00, mas fez as seguintes exigências:

   (a) Gastar todo dinheiro até o último centavo.

   (b) Comprar exatamente 100 animais (vivos!).

   (c) Comprar pelo menos um ganso, um pato e um pintinho.

   (d) Comprar somente gansos, patos e pintinhos.

   Ao chegar à loja João foi informado que cada ganso custava R$ 10,00, cada pato custava R$ 3,00 e cada pintinho custava R$ 0,50. Determine se é possível atender as exigências com estes preços. Se for possível, quantos animais de cada espécie João deve comprar?

3. João pretendia comprar 4 pares de meias pretas e alguns pares de meias azuis. Na hora do pedido ser anotado as cores foram trocadas. As meias pretas custam o dobro das meias azuis. Com esta troca, a compra ficou 50% mais cara. Qual a quantidade de meias azuis que João pretendia comprar?

4. Temos 1999 peças no formato da figura abaixo (Fig.1) e desejamos fazer o maior quadrado possível, sem buracos ou superposições. Quantas peças sobram?

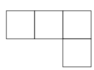


Figura 1

5. Duas pessoas jogam um jogo que consiste em citar, alternadamente, datas (mês e dia). O primeiro jogador começa dizendo janeiro e um dia deste mês, por exemplo, janeiro 14. O segundo jogador deve responder com uma data posterior à data citada pelo primeiro jogador, deixando inalterado ou o dia ou o mês já citados. Assim, seguindo o exemplo, o segundo

jogador poderia dizer janeiro 20 ou abril 14, etc. Uma rodada poderia transcorrer assim: janeiro 14, abril 14, abril 27, abril 30, junho 30,... O vencedor é aquele que primeiro puder citar a data dezembro 31. Qual dos jogadores pode sempre ganhar e qual a estratégia que ele deve usar para ganhar?

Você Sabia? Números perfeitos são números cuja soma dos seus divisores (excetuando o próprio número) resulta no próprio número. Exemplo: 28 divisores de 28: $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ 1+2+4+7+14=28

Nível 3

1. Temos 1999 peças no formato da figura abaixo (Fig.1) e desejamos fazer o maior quadrado possível, sem buracos ou superposições. Quantas peças sobram? Justifique por que o seu quadrado é o maior possível.

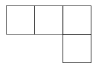


Figura 1

2. Duas pessoas jogam um jogo que consiste em citar, alternadamente, datas (mês e dia). O primeiro jogador começa dizendo janeiro e um dia deste mês, por exemplo, janeiro 14. O segundo jogador deve responder com uma data posterior à data citada pelo primeiro jogador, deixando inalterado ou o dia ou o mês já citados. Assim, seguindo o exemplo, o segundo jogador poderia dizer janeiro 20 ou abril 14, etc. Uma rodada poderia transcorrer assim: janeiro 14, abril 14, abril 27, abril 30, junho 30,... O vencedor é aquele que primeiro puder citar a data dezembro 31. Qual dos jogadores pode sempre ganhar e qual a estratégia que ele deve usar para ganhar?

3. Uma parábola é uma curva que é o lugar geométrico dos pontos cuja distância a uma reta dada, chamada diretriz da parábola, é igual à distância a um ponto dado fora da reta, chamado foco da parábola (Fig. 2). Sejam F o foco, P um ponto da parábola e Q o pé da perpendicular à diretriz por P. Mostre que a mediatriz de QF passa por um único ponto da parábola de tal modo que esta curva fica toda contida num único semiplano determinado pela mediatriz.

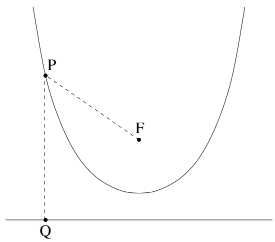


Figura 2

4. Em um retângulo $ABCD$ estão inscritas duas circunferências (de raio não necessariamente iguais) tangentes entre si, tais que uma delas é ainda tangente aos lados AB e AD, e a outra é tangente aos lados BC e CD do retângulo (Fig. 3).

   (a) Mostre que o ponto de tangência das duas circunferências está sobre a diagonal AC do retângulo.

   (b) Qual deve ser a relação entre os lados do retângulo de modo a existir sempre um par de circunferências satisfazendo as condições acima?

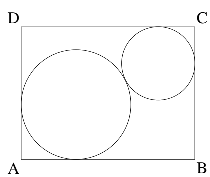


Figura 3

5. Mostre que um número diferente de 1 e formado apenas por algarismos 1 não pode ser um quadrado perfeito.

Soluções

Nível 1

1. Há três possibilidades no interior do círculo menor. Para cada uma dessas possibilidades de cor temos 2 possibilidades entre os dois círculos. Novamente 2 possibilidades no retângulo maior, e finalmente 2 possibilidades no retângulo menor. Assim, temos $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ maneiras distintas de pintar a bandeira.

2. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{7}{6} = 2$

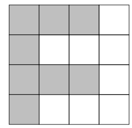
   $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = 2 - \dfrac{7}{6} \Longrightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{5}{6}$

   Experimentando algumas possibilidades:
   $\dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{6}$, $\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{6}$, $\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{19}{24}$ etc. Assim, algumas respostas são, respectivamente:
   $\dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{1}{6}$ ou $\dfrac{1}{6}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{1}{6}$, ou $\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{19}{24}$, etc.

3. 1 mesa + 4 bancos = 1 conjunto ou 1 tampo + 4 pés + 4 bancos = 1 conjunto
   1 operário fabrica num turno:
   3 tampos $\rightarrow$ 3 conjuntos
   16 pés $\rightarrow$ 4 conjuntos
   8 bancos $\rightarrow$ 2 conjuntos.
   mmc(3,4,2)=12
   Para formar 12 conjuntos (menor múltiplo) precisamos de 12 tampos, 48 pés e 48 bancos.
   12 conjuntos $\rightarrow$ 12 tampos $\rightarrow$ 4 operários para os tampos.
   12 conjuntos $\rightarrow$ 48 pés $\rightarrow$ 3 operários para os pés.
   12 conjuntos $\rightarrow$ 48 bancos $\rightarrow$ 6 operários para os bancos.
   Logo são fabricados 12 conjuntos, e precisa-se de 4 operários para os tampos, 3 operários para os pés e 6 operários para os bancos.

4. Com 4 peças formamos 1 quadrado. Usamos estes blocos de 4 peças para fazer novos quadrados.

Assim:
4 blocos $\rightarrow 4 \times 4 = 16$ peças
9 blocos $\rightarrow 9 \times 4 = 36$ peças
16 blocos $\rightarrow 16 \times 4 = 64$ peças
25 blocos $\rightarrow 25 \times 4 = 100$ peças
36 blocos $\rightarrow 36 \times 4 = 144$ peças
$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$



O número de peças usadas será múltiplo de 4 por um quadrado perfeito.

$$1999 = 499 \cdot 4 + 3$$

O quadrado perfeito mais próximo de 499 é $22 \times 22 = 484$
Logo:

$$499 \cdot 4 + 3 = (484 + 15) \cdot 4 + 3 = 484 \cdot 4 + 15 \cdot 4 + 3 = 22^2 \cdot 4 + 63$$

Sobram 63 peças.

5. O homem tem duas opções:

   (a) Correr na direção do trem. Neste caso ele corre $\frac{1}{3}$ do comprimento da ponte e dá de cara com o trem, mas se salva.
   Assim, o tempo que ele demora para percorrer $\dfrac{1}{3}$ da ponte é o mesmo que o trem demora para chegar até a entrada da ponte.

   (b) Correr na direção contrária ao sentido do trem. Neste caso, ele deve correr $\dfrac{2}{3}$ do comprimento da ponte. No primeiro terço o trem chega na entrada da ponte. No segundo terço o trem cruza toda a ponte e ele se salva.
   Assim, a velocidade do trem é 3 vezes a velocidade do homem. Sendo 45 Km/h a velocidade do trem, a do homem é de 15 Km/h.

Nível 2

1. $$a^2 - b^2 = 37 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 37$$

   Como 37 é primo, temos a única possibilidade:

   $$\begin{cases} a & + & b & = & 37 \\ a & - & b & = & 1 \end{cases}$$

   $$2a = 38 \Rightarrow a = 19 \Rightarrow b = 18$$

   Logo os números são 19 e 18.

2. Seja G o número de gansos, P o número de patos, e T o número de pintinhos.

   Então: $10G + 3P + \frac{1}{2}T = 100$ ou $20G + 6P + T = 200$

   Pela exigência (b) temos que: $G + P + T = 100$. Então: $T = 200 - 20G - 6P \Rightarrow T = 100 - G - P$

   $$200 - 20G - 6P = 100 - G - P \Rightarrow 100 = 19G + 5P \Rightarrow P = \frac{100 - 19G}{5}$$

   Para P ser um número inteiro, $100 - 19G$ deve ser múltiplo de 5, ou seja, deve terminar em 0 ou 5.

   O múltiplo de 19 terminado em 5 e menor que 100 é $95 = 19 \cdot 5$.

   Logo, $P = \frac{100-95}{5} = 1$, $G = 5$ e $T = 94$

   Portanto João deve comprar 94 pintinhos, 5 gansos e 1 pato.

3. Temos 4 pares de meias pretas e x pares de meias azuis.
   Seja p o preço do par de meias pretas e a o preço do par de meias azuis.
   Então: $p = 2a$.
   Pelo fato de que a compra ficou 50% mais cara, obtemos a seguinte relação:

   $$\frac{3}{2}(4p + xa) = 4a + x \cdot p$$

$$\frac{3}{2}(4 \cdot 2a + xa) = 4a + x \cdot 2a$$

$$12a + \frac{3}{2}xa = 4a + 2xa \Rightarrow 8a = \frac{1}{2}xa \Rightarrow x = 16$$

Logo João pretendia comprar 16 meias azuis.

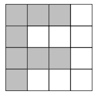
4. Ver solução da questão 5 do nível 1.

5. Vamos analisar o problema de trás para frente. O jogador que disser dezembro (e não 31) estará perdido. Assim, aquele que disser novembro 30 ganhará, pois obrigará o adversário a dizer dezembro 30. Portanto novembro 30 é um "lance" vencedor(V). Para necessariamente poder dizer novembro 30 o jogador (vencedor) dirá outubro 29, pois isto obrigará o adversário a dizer novembro 29 (e daí novembro 30 para o vencedor) ou outubro 30 (que também levará a novembro 30) . Prosseguindo desta maneira, o vencedor dizendo setembro 28 obrigará o seu oponente a dizer ou setembro 29 (o que leva a outubro 29), ou setembro 30 (o que leva a novembro 30), ou outubro 28 (o que leva a outubro 29), ou novembro 28 (o que leva a novembro 30), ou dezembro 28 (o que leva à vitória). Assim, o vencedor deverá "percorrer uma trilha" de lances que podem passar por: novembro 30, outubro 29, setembro 28, agosto 27, julho 26, junho 25, maio 24, abril 23, março 22, fevereiro 21 e, finalmente janeiro 20.

   Ganha portanto o jogador que começar a partida, e ele deve começar citando janeiro 20. Daí para frente basta ele se encaixar em alguma das datas da "trilha" acima não permitindo (é sempre possível) que o seu adversário as cite.

Nível 3

1. Com 2 peças formamos um “retângulo” 2×4.



Portanto, juntando dois blocos deste retângulo, formamos um quadrado 4×4 (ou seja, com 4 peças). Vamos chamar os pequenos quadrados que compõem cada peça de quadrados unitários. Assim, cada peça contém 4 quadrados unitários. O quadrado formado acima com 4 peças contém $4 \cdot 4 = 16$ quadrados unitários. Vamos chamar este quadrado de 4 peças de bloco base.
Juntando 4 blocos base formamos outro quadrado (8×8 quadrados unitários) com $4 \cdot 4$ peças. Com 9 blocos base temos outro quadrado (12×12) com $4 \cdot 9$ peças. Em geral teremos quadrados com $4 \cdot n^2$ peças.
Seja n o maior inteiro tal que $4n^2 \leq 1999$, ou seja, $n^2 \leq 499$. Então $n = 22$ (fácil de calcular sem máquina, pois $20 < n < 30$, e portanto $n = (20 + a)$, onde $1 \leq a \leq 9$, então $(20 + a)^2 = 400 + 40a + a^2 \leq 499$, ou $40a + a^2 \leq 99$, o que dá $1 \leq a \leq 2$, sendo $a = 2$ a melhor solução, ou seja, $n = 22$).
Temos então um quadrado com $4 \cdot (22)^2 = 1936$ peças. Este quadrado é um quadrado 88×88 quadrados unitários. Poderíamos ter um quadrado maior?
Observe que as 1999 peças contêm $4 \cdot 1999 = 7996$ quadrados unitários no total. Um quadrado formado por $89 \cdot 89 = 7921$ quadrados unitários é impossível, pois 7921 não é múltiplo de 4 (lembre-se que cada peça tem 4 quadrados unitários). Um quadrado formado por $90 \cdot 90 = 8100$ quadrados unitários ultrapassaria o total de 7996 quadrados unitários disponíveis.
Portanto a resposta correta é aquela que envolve $4 \cdot (22)^2 = 1936$ peças e assim sobram $1999 - 1936 = 63$ peças.

2. Ver solução do problema 5 do nível 2.

3. A mediatriz de QF passa por P, pois $\overline{PQ} = \overline{PF}$ (o triângulo PQF é isósceles).
Observe agora que qualquer ponto A entre a diretriz e a parábola (isto

é, tal que a perpendicular traçada por ele à diretriz cruza esta em B e a parábola em C e satisfaz $\overline{AB} < \overline{CB}$) é tal que sua distância à diretriz é <u>menor</u> do que sua distância ao foco F, pois $\overline{CF} = \overline{CB}$ e $\overline{CB} > \overline{AB}$. Portanto $\overline{AF} > \overline{CF} - \overline{AC} = \overline{CB} - \overline{AC} = \overline{AB}$ (Veja a Figura 1).
Qualquer ponto D acima da parábola (isto é, tal que a perpendicular à diretriz cruza esta em E e a parábola em G é tal que $\overline{DE} > \overline{GE}$) satisfaz $\overline{DE} > \overline{DF}$, ou seja, a sua distância à diretriz é <u>maior</u> do que a sua distância ao foco F ($\overline{DF} < \overline{GF} + \overline{GD} = \overline{GE} + \overline{GD} = \overline{DE}$).
Tomemos agora um ponto R qualquer da mediatriz de QF distinto de P. Então $\overline{RQ} = \overline{RF}$. Seja S o ponto pé da perpendicular por R à diretriz. Então o triângulo RSQ é retângulo em S e $\overline{RQ} > \overline{RS}$. Segue-se que $\overline{RS} < \overline{RF}$. Isto vale para qualquer ponto R sobre a mediatriz de QF (exceto para P onde $\overline{PQ} = \overline{PF}$), o que mostra que a parábola está toda contida no semiplano (determinado pela mediatriz) que contém F (Veja a Figura 2).

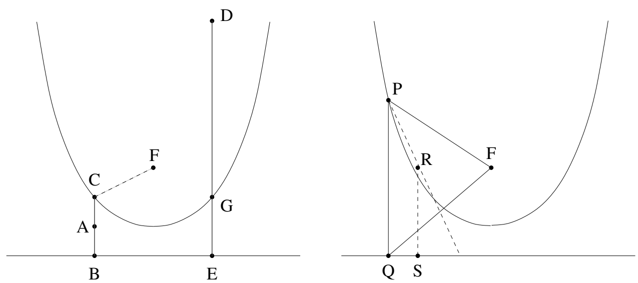


Figura 1 Figura 2

4. Vamos raciocinar com o caso $\overline{AB} \geq \overline{BC}$ (o outro caso, $\overline{AB} < \overline{BC}$ é análogo, bastando fazer rotações com o retângulo).
Observe inicialmente que os centros O e O', respectivamente das circunferências que tangenciam AB e AD, e BC e CD, estão sobre as bissetrizes dos ângulos retos $\angle BAD$ e $\angle BCD$.

   (a) No caso do quadrado ($\overline{AB} = \overline{BC}$) a diagonal conterá os centros O e O' e, como o ponto de tangência P das circunferências está na reta que contém O e O', segue-se que P está na diagonal AC.
   Considere agora o caso $\overline{AB} > \overline{BC}$ (ver figura 3). Considere os

triângulos AOP e $CO'P$. Não sabemos ainda se A, P e C são colineares. Prolongando o segmento OO' (que contém P) obtemos os ângulos α e β, respectivamente suplementos dos ângulos $\angle CO'P$ e $\angle AOP$. Note que $\alpha = \beta$, pois têm os lados paralelos $(AO//CO')$. Então os dois triângulos em consideração têm um ângulo igual, a saber, $\angle AOP = \angle CO'P$. Por outro lado $\overline{AO} = \overline{PO}\sqrt{2}$ e $\overline{CO'} = \overline{PO'}\sqrt{2}$ (pois $\overline{PO}$ e $\overline{PO'}$ são raios das duas circunferências). Segue-se $\frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{CO'}}{\overline{PO'}} = \sqrt{2}$ e, como os lados proporcionais formam ângulos iguais, segue-se que os triângulos AOP e $CO'P$ são semelhantes. Daí temos que $\angle APO = \angle CPO'$ e portanto estes ângulos são opostos pelo vértice (já que O, P e O' estão alinhados). Segue-se que A, P e C estão alinhados e portanto P está sobre a diagonal AC do retângulo.

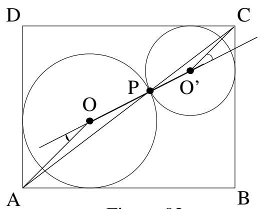
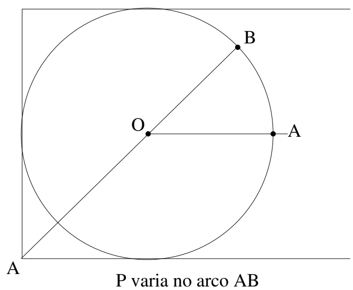


Figura 03

(b) No caso do quadrado ($\overline{AB} = \overline{BC}$) sempre é possível encontrar um par de circunferências satisfazendo as condições de tangência acima. Consideremos o caso ($\overline{AB} > \overline{BC}$). É fácil perceber que se $\overline{AB}$ for muito maior do que $\overline{BC}$, então não será possível encontrar um par de circunferências satisfazendo as condições de tangência acima (é intuitivo). Como queremos apenas saber em que situações há algum par de circunferências satisfazendo as condições de tangência vamos analisar a situação limite em que a circunferência de centro O (que tangencia AB e AD) também tangencia CD (ou seja, tal que o seu raio seja igual a $\frac{\overline{BC}}{2}$). O centro O' da outra circunferência encontrar-se-á na intersecção da reta OP com a bissetriz do ângulo $\angle BCD$. O ponto P poderá variar desde o ponto de cruzamento do prolongamento de AO com a circunferência de centro O até o ponto de cruzamento da paralela por O ao lado AB (figura 4). O ponto

P não pode estar abaixo deste último ponto, pois, neste caso, o centro O' estaria a uma distância de CD maior do que de AB. Se P estiver no prolongamento de AO, então a solução será o quadrado. Se P estiver sobre a paralela a AB por O então a circunferência de centro O' terá raio igual à outra e, neste caso, $\overline{AB} = 4$ raios, ou seja, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. Portanto a relação entre os lados, para que exista um par de circunferências tangentes satisfazendo as condições acima é:

$$\overline{BC} \leq \overline{AB} \leq 2 \cdot \overline{BC}$$



P varia no arco AB

Figura 4

OBS: A afirmação em (a) sobre a existência dos triângulos AOP e $CO'P$ pode ser justificada assim: se P estivesse alinhado com A e O, então A, O, P e O' seriam colineares, e a intersecção desta reta com o lado CD deveria ser necessariamente o ponto C, já que CO' faz um ângulo de 45° com CD (AO também).

5. Sabemos que 11, 111 e 1111 não são quadrados perfeitos. Além disso, para que o quadrado de um número natural m termine em 1 (unidade 1) é necessário que m termine em 1 ou em 9. Consideremos dois casos:

   (a) $m = 100a + 10b + 1$

   (b) $m = 100a + 10b + 9$,
   onde a é um número natural e $0 \leq b \leq 9$ (isto é, b é a casa das

dezenas de m).
Então:

(a) $m^2 = (100a + 10b + 1)^2 = 10^4a^2 + 100b^2 + 2 \cdot 10^3ab + 2 \cdot 10^2a + 20b + 1$. Neste caso, teremos para a casa das dezenas de m^2 a casa das unidades de $2b$ que é par e portanto não pode ser igual a 1. Logo, m não pode ser desta forma.

(b) $m^2 = (100a+10b+9)^2 = 10^4a^2+100b^2+2\cdot10^3ab+18\cdot10^2a+180b+81$. Neste caso, teremos para a casa das dezenas de m^2 a casa das unidades de $8b + 8$, que é par, e portanto não pode ser igual a 1. Logo, m não pode ser desta forma.

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por tipo de medalha)

Nível 1

Ouro

- Felipe Paupitz Schlichting (Colégio Coração de Jesus)
- Guilherme Sada Ramos (Educandário Imaculada Conceição)
- Karine Piacentini da Costa (Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito)
- Martim Azevedo do Nascimento (Educandário Imaculada Conceição)

Prata

- Bruno Leonardo Schneider (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Cleber Rafael de Campos (Instituto CVE - São Miguel do Oeste)
- Filipe Ivo Rosa (Centro Educacional Visão)
- Gustavo Henrique Nihei (Dom Jaime Câmara)
- Rodrigo Parisi Freitas (Educandário Imaculada Conceição)

Bronze

- Arthur de Oliveira Lopes (Centro Educacional Menino Jesus)
- Christiani Schweitzer Almeida Pereira (Educandário Imaculada Conceição)
- Gabriela Stein Zacchi (Centro Educacional Menino Jesus)
- Hanna Kurihara e Silva (Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito)
- Henrique Besen Müller (Colégio Carrossel)
- José Arthur Silveira Teixeira (Colégio Dom Jaime Câmara)

- Leonardo Silva Alves (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Lindolfo Moratelli Filho (Educandário Imaculada Conceição)
- Martina Scheidt (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Thais Cristina Rejane Heim (Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito)

Menção Honrosa

- Ariela Melo Rodrigues (Centro Educacional Visão)
- Francielle Ana Grando (Educandário Imaculada Conceição)
- Gustavo Martins (Colégio Carrossel)
- Jaime Paz Lopes (Educandário Imaculada Conceição)
- Marcos Vinícius Oliveira da Cunha (Educandário Imaculada Conceição)
- Priscila Petri (Centro Educacional Visão)
- Ramon Frassetto (Educandário Imaculada Conceição)

Nível 2

Ouro

- Gabriel Weiss Maciel (Colégio Catarinense)
- João Felipe Almeida Destri (Colégio Coração de Jesus)

Prata

- Arthur Eduardo Schütz (Colégio Carrossel)
- Bruno Henrique de Abreu (Colégio Catarinense)
- Caroline Louise Barreto Lohn (Colégio Coração de Jesus)
- Gabriel de Freitas Camacho (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Mariane Martins (Colégio Dom Jaime Câmara)

Bronze

- Alexandre Kindermann Bez (Colégio Coração de Jesus)
- André Felipe Rothstein (Colégio Estadual Aderbal Ramos da Silva)
- Eduardo Choozo Arenas Kami (Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito)
- Melina Ribeiro Curi (Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito)

Menção Honrosa

- Cláudia Azibeiro Pomar (Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito)
- Cristiane da Rosa Pereira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Flora Moritz da Silva (Educandário Imaculada Conceição)
- Hilton Fernando da Silva Pinheiro (Escola de Educação Básica Beatriz de Souza Brito)
- João Carlos Oliveira de Souza (Colégio Estadual Aderbal Ramos da Silva)
- José de Assis Ramos Neto (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Leonardo Badalotti Brandão (Educandário Imaculada Conceição)
- Tatiane Neves de Anselmo (Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito)

Nível 3

Ouro

- Giuliano Boava (Colégio Marista - Criciúma)

Prata

- André da Silva Schneider (Colégio Energia)
- Rafael Ávila de Espíndola (Colégio Dom Jaime Câmara)

Bronze

- Crineu Tres (Colégio Energia)
- Juliana Duarte Zacchi (Colégio Carrossel)
- Leonardo Bernhardt Roncatto (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Mathias José Kreutz Erdtmann (Colégio de Aplicação)

Escolas Participantes

1. Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis)
2. Centro Educacional Visão (São José)
3. Colégio Aderbal Ramos da Silva (Florianópolis)
4. Colégio Carrossel (Palhoça)
5. Colégio Catarinense (Florianópolis)
6. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)
7. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
8. Colégio Energia (Florianópolis)
9. Colégio Estadual Getúlio Vargas (Florianópolis)
10. Colégio Marista (Criciúma)
11. Colégio da Lagoa (Florianópolis)
12. Colégio de Aplicação - UFSC (Florianópolis)
13. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)
14. Escola Básica Almirante Carvalhal (Florianópolis)
15. Escola Básica João Alfredo Rohr (Florianópolis)
16. Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito (Florianópolis)
17. Escola Técnica Federal de Santa Catarina - ETFSC (Florianópolis)
18. Escola da Ilha (Florianópolis)
19. Instituto Educacional CVE (São Miguel do Oeste)

III ORM (2000)

Problemas

Nível 1

1. A tecla de um dos algarismos de uma calculadora está com defeito: quando ela é apertada aparece outro algarismo em seu lugar (sempre o mesmo). No entanto, a calculadora efetua corretamente as operações. Usando esta calculadora, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$5672 + 7747 = 12975$$

$$279 \times 767 = 87713$$

   Qual o algarismo que aparece erradamente? Ele aparece no lugar de qual algarismo?

2. São dados uma balança de dois pratos e um conjunto de bolas iguais na aparência mas uma, e apenas uma delas é mais pesada que as outras. Qual o número mínimo de pesagens para se determinar a bola mais pesada se:

   (a) O conjunto tiver exatamente 3 bolas?

   (b) O conjunto tiver exatamente 6 bolas?

   (c) O conjunto tiver exatamente 9 bolas?

3. Um terreno de forma retangular com dimensões 50 m por 70 m deve ser cercado com uma tela metálica presa a postes dispostos no contorno de seu perímetro. Existem dois tipos de tela de arame: uma mais forte, cujo preço é R$ 10,00 o metro, e uma mais fraca, cujo preço é R$ 9,00 o metro. A tela de arame mais forte exige um espaçamento máximo de 12 metros entre cada poste, enquanto a tela de arame mais fraca exige um espaçamento máximo de 8 metros entre cada poste. Sabendo-se que cada poste custa R$ 30,00, determine a maneira mais barata de cercar o terreno usando apenas um tipo de tela.

4. Um banco garante que a cada ano o total de dinheiro da caderneta de poupança de seus clientes será duplicado. Se uma pessoa depositar R$ 1,00 numa caderneta de poupança deste banco, a partir de quantos anos ela terá mais de um milhão de reais? Se ela depositar R$ 4,00, a partir de quantos anos ela terá mais de um milhão de reais?

5. Dois carregadores de mala trabalham em uma esteira de bagagens de um aeroporto descarregando malas. O serviço deles consiste em pegar uma mala na esteira, colocá-la em um carrinho, levá-la ate a saída e voltar para a esteira. O carregador A faz o serviço em 40 segundos, enquanto o carregador B faz o mesmo serviço em 60 segundos. Os dois carregadores trabalham em um mesmo local de frente à esteira e sempre que os dois se encontram ao mesmo tempo neste local, o carregador A pega primeiro a mala. Sabendo-se que uma mala passa na esteira na frente deste lugar a cada 20 segundos, quantas malas eles descarregam entre 12 horas e 12 horas e 30 minutos de um dia, realizando o serviço completo, se a primeira mala a ser descarregada passa em frente aos dois às 12 horas e 40 segundos?

Você Sabia? Dois números são ditos amigos quando a soma dos algarismos do quadrado de um resulta no outro número e vice-versa. Exemplo: 13 e 16, $13^2 = 169 \quad 1 + 6 + 9 = 16$, $16^2 = 256 \quad 2 + 5 + 6 = 13$

Nível 2

1. Uma calculadora tem duas teclas de algarismos com defeito: quando elas são apertadas aparecem outros algarismos no visor (sempre os mesmos para cada tecla). No entanto, a calculadora efetua corretamente a operações. Tentando-se realizar as seguintes operações, os resultados obtidos foram:
$$15327 \times 46 = 980928$$
$$34809 + 5362 = 42151$$
Quais são os algarismos que aparecem erradamente? Eles aparecem no lugar de quais algarismos?

2. São dados uma balança de dois pratos e um conjunto de bolas iguais na aparência mas onde uma, e apenas uma delas é mais pesada que as outras. Qual o número mínimo de pesagens para se determinar a bola mais pesada se:
   (a) O conjunto tiver exatamente 6 bolas?
   (b) O conjunto tiver exatamente 9 bolas?
   (c) O conjunto tiver de 10 a 18 bolas?

3. Uma pessoa possui um balde de 8 litros cheio de água, e quer dividir este volume em duas partes iguais de 4 litros tendo à sua disposição mais dois baldes: um de 5 litros e outro de 3 litros. Como ela pode fazer isso sabendo-se que nenhum balde possui uma graduação de volume? Explique porque esta pessoa não pode dividir um volume de 10 litros em duas partes iguais, tendo à sua disposição 3 baldes: um de 10 litros, um de 6 litros e um de 2 litros.

4. Dois carregadores de mala trabalham em uma esteira de bagagens de um aeroporto descarregando malas. O serviço deles consiste em pegar uma mala na esteira, colocá-la em um carrinho, levá-la ate a saída e voltar para a esteira. O carregador A faz o serviço em 40 segundos, enquanto o carregador B faz o mesmo serviço em 60 segundos. Os dois carregadores trabalham em um mesmo local de frente à esteira e sempre que os dois se encontram ao mesmo tempo neste local, o carregador A pega primeiro a mala. Sabendo-se que uma mala passa na esteira na frente deste lugar

a cada 20 segundos, quantas malas eles descarregam entre 12 horas e 12 horas e 30 minutos de um dia, realizando o serviço completo, se a primeira mala a ser descarregada passa em frente aos dois às 12 horas e 40 segundos?

5. Considere um polígono regular de 22 lados (isto é, um polígono que tem 22 lados de mesmo comprimento e todos os 22 ângulos internos são iguais) com seus vértices enumerados consecutivamente no sentido horário de 0 (zero) até 21. Uma rã salta pelos vértices deste polígono da seguinte forma: ela parte de um vértice, digamos o vértice 0, pula para o vértice 2 (deixando de passar pelo vértice 1) e depois pula para o vértice oposto em relação ao centro do polígono. Se a rã continua com este padrão de pulos, isto é, sempre alternando um pulo dois vértices à frente com um pulo para o vértice oposto, após quantos saltos estará de volta ao vértice inicial?

Nível 3

1. Um ponto no interior de um quadrado $ABCD$ encontra-se a distâncias 3, 4 e 5 metros respectivamente dos vértices A, B e C deste quadrado. Encontre a área do quadrado.

2. Uma pessoa, partindo de uma posição inicial, caminha 600 metros em linha reta e pára. Ela vira-se de um ângulo de 60° para a direita e caminha mais 600 metros em linha reta, parando novamente. Vira-se de um ângulo de 60° para a esquerda e caminha mais 300 metros em linha reta e finalmente pára. Determine a distância, em linha reta, entre os pontos inicial e final, sabendo-se que sen 30°= 0,5.

3. Uma pessoa, ao completar 17 anos, resolve festejar seu aniversário com um bolo com 17 velas. Ela só consegue comprar caixas com 12 velas. Assim ela compra duas caixas, usa 17 velas e guarda as 7 que sobram. Para o próximo ano ela só precisa comprar uma caixa de velas novas para usar juntamente com aquelas que guardou do ano anterior. Novamente ela guarda a única vela que sobra. Prosseguindo desta maneira a cada ano, com que idade ela festejará seu aniversário e não sobrará nenhuma vela?

4. São dados uma balança de dois pratos e um conjunto de bolas iguais na aparência mas uma, e apenas uma delas é mais pesada que as outras. Qual o número mínimo de pesagens para se determinar a bola mais pesada se:

   (a) O conjunto tiver exatamente 6 bolas?

   (b) O conjunto tiver exatamente 20 bolas?

   Prove que para um conjunto de k bolas com $3^{n-1} + 1 \leq k \leq 3^n$, são necessárias n pesagens para determinar a bola mais pesada.

5. Uma pessoa possui um balde de 8 litros cheio com água, e quer dividir este volume em duas partes iguais de 4 litros tendo à sua disposição apenas o balde de 8 litros e mais dois baldes: um de 5 litros e outro de 3 litros. Como ela pode fazer isso sabendo-se que nenhum balde possui uma graduação de volume? Explique porque esta pessoa não pode dividir um volume de 10 litros em duas partes iguais, tendo à sua disposição 3 baldes: um de 10 litros, um de 6 litros e um de 3 litros.

Soluções

Nível 1

1. Analisando-se a primeira operação: $5672 + 7747 = 12975$, observa-se de imediato que um dos dois algarismos das unidades, 2 ou 7, está errado. Se o erro ocorrer com o 2, a tecla com defeito seria a tecla do algarismo 8 (apertando-a aparece 2 no visor, mas a operação seria correta: $8 + 7 = 15$). Neste caso, a operação correta seria: $5678 + 7747 = 13425$ o que dá um resultado incorreto (note que não aparece nenhum 8 nem outro 2 na conta).

   Portanto o erro ocorre onde aparece o 7. Neste caso, a tecla com defeito seria a tecla do 3 ($2 + 3 = 5$).

   Note que aparecem outros algarismos 7 na conta. Não se deve esquecer que, na hipótese da tecla com defeito ser 3, a tecla do 7 não apresenta defeito. Portanto, nem todo 7 que aparece no visor é proveniente de um apertão na tecla 3.

   Analisando-se a soma, é fácil ver que o algarismo 7 da casa da dezena de $56\underline{7}2$ deve ser 3, o mesmo para o algarismo 7 da casa da centena de $7\underline{7}47$, e o algarismo 7 da casa da unidade de milhar de $\underline{7}747$ está correto. A primeira operação correta é portanto: $5632 + 7343 = 12975$.

   Obs: A segunda operação correta é: $239 \times 367 = 87713$.

2. (a) Uma pesagem: Coloca-se uma bola em cada prato. Se a balança equilibra, a outra bola é a mais pesada. Se isto não ocorre, a bola mais pesada está no prato que pende para baixo.

   (b) Duas pesagens: Coloca-se 3 bolas em cada prato. Um dos pratos penderá para baixo, indicando o grupo (com 3 bolas) onde está a bola mais pesada. Caímos então no caso (a). Basta então mais uma pesagem.

   Obs: Pode-se fazer isto colocando-se duas bolas em cada prato. A mais pesada estará em um dos 3 grupos de duas bolas.

   (c) Duas pesagens: Coloca-se 3 bolas em cada prato, ficando 3 bolas de fora. Se os pratos se equilibram, as 3 bolas de fora contém a mais pesada. Caso contrário, o prato que pender para baixo conterá a bola mais pesada. Em qualquer caso, caímos em (a), com mais uma pesagem.

3. Para a tela forte:

   $50 \div 12 = 4$ e resta 2. Temos portanto 5 espaços, o que nos dá 6 postes, incluídos os dos cantos, em cada uma das duas dimensões de 50 m.

   $70 \div 12 = 5$ e resta 10. Temos 6 espaços, o que nos dá 5 postes, excluídos os cantos, em cada uma das duas dimensões de 70 m.

   Total de postes: $2 \times 6 + 2 \times 5 = 22$.

   Perímetro: 240 m.

   Portanto: $22 \times 30,00 + 240 \times 10,00 = 660,00 + 2400,00 =$ R\$ 3060,00.

   Para a tela fraca:

   $50 \div 8 = 6$, resto 2. Nos dá 7 espaços $\Rightarrow$ 8 postes em cada dimensão de 50 m (incluídos os cantos).

   $70 \div 8 = 8$, resto 6. Nos dá 9 espaços $\Rightarrow$ 8 postes em cada dimensão de 70 m (excluídos os cantos).

   Total de postes: $2 \times 8 + 2 \times 8 = 32$.

   Portanto: $32 \times 30,00 + 240 \times 9,00 = 960,00 + 2160,00 =$ R\$ 3120,00.

   Portanto, a maneira mais barata de cercar o terreno consiste em usar a tela forte. Serão usados 22 postes e serão gastos R\$ 3060,00.

4. Depositando R\$ 1,00, ao final do primeiro ano (ou a partir do segundo ano, ou ainda, após o primeiro ano), ela terá R\$ 2,00. Após 2 anos terá R\$ 4,00, etc. Então:

1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
2	4	8	16	32
6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	10º ano
64	128	256	512	1024

   Note que $4 \times 4 = 16, 8 \times 8 = 64, 16 \times 16 = 256$.
   Assim 1024×1024 será maior do que 1.000.000 (e 512×512 não é maior do que 1.000.000)
   Portanto, após 20 anos (ou a partir do 21º ano) ela terá mais do que R\$ 1.000.000,00
   Depositando R\$ 4,00, teremos (após os anos):

1^oano	2^oano	3^oano	4^oano
8	16	32	...

Assim, após 18 anos (ou a partir do 19^o ano) ela terá mais do que R$ 1.000.000,00.

5. Vamos analisar um ciclo típico:

   - A e B estão em frente a esteira aos 0 segundos e passa a primeira mala. O carregador A pega esta mala e B espera.
   - Aos 20 segundos passa a segunda mala e B a pega (A ainda não voltou).
   - Aos 40 segundos passa a terceira mala, A acaba de voltar e pega esta mala (B está fora a 20 segundos).
   - Aos 60 segundos passa a quarta mala. A e B não voltaram (A está 20 segundos fora e B está 40 segundos fora).
   - Aos 80 segundos passa a quinta mala e A e B estão juntos novamente em frente à esteira (A pega esta mala e iniciará o serviço).

   Portanto: a cada 80 segundos A e B fizeram o serviço completo descarregando juntos 3 malas.
   Entre 12 horas e 40 segundos e 12 horas e 30 minutos temos:

   $$29 \text{ minutos} + 20 \text{ segundos} = 29{\times}60 + 20 = 1760 \text{ segundos}$$
   $$1760 \div 80 = 22 \text{ grupos de } 80 \text{ segundos}$$

   Portanto, A e B descarregam (completamente): $22 \times 3 = 66$ malas.

Nível 2

1. Efetuando as operações com os algarismos dados temos:

$$\underline{1}532\underline{7} \times \underline{46} = 705042 \text{ e } 3\underline{4}8\underline{0}9 + \underline{5}3\underline{6}2 = 40171$$

Comparando estes resultados com os resultados dados no problema, podemos detectar falhas nos algarismos marcados (pelo menos). Como 4 e 6 aparecem duas vezes com defeito podemos supor que estes sejam os algarismos com problemas (ou seja, que aparecem no lugar dos algarismos cujas teclas têm problemas). Uma análise mais cuidadosa leva à mesma conclusão: se, na multiplicação, os algarismos 7 e 6 estão errados, então teríamos mais de duas teclas com problemas, pois 1 ou 4 também apresentam erro; se somente o 7 apresenta erro, então ou 1 ou 4, ainda na multiplicação apresenta erro mas, neste caso, na adição ainda haverá problema com o zero ou 6; então 6 é que tem problema e, se 1 também tem problema, não é possível conciliar com o que ocorre na adição entre o 4 e o 5; portanto 4 e 6 apresentam problemas.
Para satisfazer a casa da unidade no produto, o 6 está aparecendo no lugar do 4 ($4 \times 7 = 28$). Pode-se verificar que, na adição, o 6 também deveria ser 4 e que, ainda na adição, o 4 está surgindo no lugar do 6. Portanto as teclas 4 e 6 estão trocando algarismos. A operação correta é:

$$15327 \times 64 = 980928 \text{ e } 36809 + 5342 = 42151$$

2. (a) Duas pesagens: Pesamos 3 bolas em cada prato. O prato que pender para baixo contém a bola mais pesada. Colocando-se, dentre estas 3 bolas, uma em cada prato, sobrará uma. Se a balança equilibrar, a bola que sobra é a mais pesada. Caso contrário, a bola mais pesada estará no prato que pender para baixo. (Outra maneira seria colocar 2 bolas em cada prato, sobrando 2. Esta pesagem identificará o grupo de 2 bolas que contém aquela mais pesada e a próxima pesagem definirá a bola distinta).

   (b) Duas pesagens: Coloca-se 3 bolas em cada prato, sobrando 3. Esta pesagem definirá o grupo de 3 bolas que contém aquela mais pesada. A próxima pesagem determinará a bola mais pesada conforme o item (a).

(c) Três pesagens: As possibilidades de pesagem para o conjunto com 10 bolas são:

prato	prato	sobram
5	5	0
4	4	2
3	3	4
2	2	6
1	1	8

Note que o maior grupo de bolas em cada caso é sempre maior do que, ou igual, a 4. Para determinar a bola mais pesada em um grupo de 4 bolas necessitamos ainda de 2 pesagens: 2 bolas em um prato e 2 bolas no outro e a próxima determina a bola distinta. Assim teremos um total de 3 pesagens.
Com 18 bolas no conjunto, colocamos 6 bolas em cada prato e sobram 6. Determina-se o grupo que contém a bola mais pesada e caímos no item (a) (mais duas pesagens). Total de pesagens: 3.
Entre 10 e 18 necessitamos obviamente de 3 pesagens.

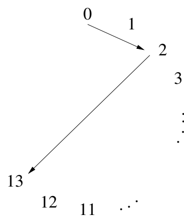
3. Início

balde de 8ℓ	balde de 5ℓ	balde de 3ℓ
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

Com um volume de 10ℓ, em um balde de 10ℓ e mais dois baldes vazios, um de 6ℓ e outro de 2ℓ , não é possível dividir em duas partes iguais pois deveríamos obter 5ℓ e 5 ℓ . Isto nunca ocorrerá, pois em qualquer operação que se faça, obteremos sempre volumes pares. (tudo o que se faz é somar ou subtrair números pares de pares).

4. Ver solução do problema 5 do nível 1.

5. Numeramos continuamente os vértices de forma que 0, 22, 44 etc correspondam ao zero; 1, 23, 45 etc correspondam ao vértice 1, etc.



Pulando 2 e depois 11 (para que seja diametralmente oposto), o sapo avançará 13 vértices.

Queremos inicialmente saber se um par de pulos $2 + 11 = 13$ pode levá-lo de volta ao vértice zero. Para isto basta calcular: $13n = 22k$.

Como 13 e 22 são primos entre si, devemos fazer $n = 22$ (e $k = 13$). Portanto são 22 pares de pulos, ou seja, 44 pulos.

A pergunta agora é: o sapo pode passar pelo vértice zero após um pulo de 2 vértices? Ou seja, após um certo número de pares de pulos $2 + 11$, e mais um pulo de 2 vértices? Para isto temos a equação: $13n + 2 = 22k$ ou $13n = 22k - 2$.

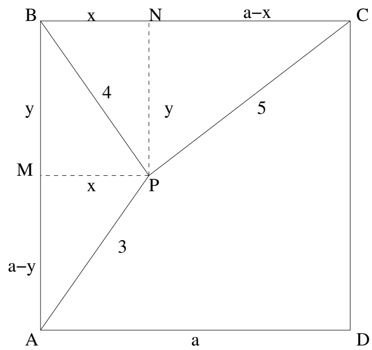
Temos que encontrar um múltiplo de 22 que, subtraído de 2 unidades, seja múltiplo de 13.

Tomando para n a metade de 44 encontrado antes (se o retorno ao vértice zero for antes de 44 pulos, então ele deverá ocorrer em torno da metade de 44) teremos: $13 \times 11 = 143$ (11 pares de pulos = 22 pulos). Então: $22 - 2 = 20$, $44 - 2 = 42$, $66 - 2 = 64$, $88 - 2 = 86$, $110 - 2 = 108$ e $132 - 2 = 130 = 13 \times 10$.

Portanto, em $(10 \times 2) + 1 = 21$ pulos ele chega ao zero.

Nível 3

1.



(1) $\triangle PNC$: $25 = y^2 + (a-x)^2$
(2) $\triangle PBN$: $16 = x^2 + y^2$
(3) $\triangle PAM$: $9 = x^2 + (a-y)^2$

De (1) e (2) temos: $25 = y^2+a^2-2ax+x^2 = a^2-2ax+16 \Rightarrow 2ax = a^2-9$

De (3) e (2) temos: $9 = x^2+a^2-2ay+y^2 = a^2-2ay+16 \Rightarrow 2ay = a^2+7$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{a^2-9}{2a} \qquad y = \frac{a^2+7}{2a}$$

Levando em (2):

$$16 = \left(\frac{a^2-9}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2+7}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow 64a^2 = a^4 - 18a^2 + 81 + a^4 + 14a^2 + 49$$

$$\Rightarrow 2a^4 - 68a^2 + 130 = 0$$

$$\Rightarrow a^4 - 34a^2 + 65 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 65}}{2} = \frac{34 \pm \sqrt{4 \cdot 17^2 - 4.65}}{2} = 17 \pm \sqrt{17^2 - 65}$$

Ambas as raízes são positivas. Qual a área certa?

Note que $5 < a\sqrt{2} \leq 8$, ou seja, $25 < 2a^2 \leq 64$ ou $a^2 > \dfrac{25}{2}$.

Mas

$$17 - \sqrt{17^2 - 65} < \frac{25}{2}$$

pois:

$17 - \sqrt{17^2 - 65} < \dfrac{25}{2} \Leftrightarrow \sqrt{17^2 - 65} > 17 - \dfrac{25}{2}$

$\Leftrightarrow 17^2 - 65 > 17^2 - 17 \cdot 25 + \dfrac{25^2}{4}$

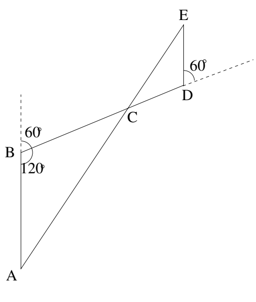
$\Leftrightarrow 17{\cdot}25 > 65 + \dfrac{25^2}{4} \Rightarrow 17{\cdot}5 > 13 + \dfrac{25 \cdot 5}{4} = 13 + \dfrac{125}{4} = 13 + 31,25 = 44,25$

Por outro lado, a outra raíz, $17 + \sqrt{17^2 - 65}$ satisfaz $5 < a\sqrt{2} \leq 8$ pois:

$17 + \sqrt{17^2 - 65} \leq 32 \Leftrightarrow \sqrt{17^2 - 65} \leq 15 \Leftrightarrow 17^2 - 65 \leq 225 \Leftrightarrow 17^2 \leq 290.$

Resposta: $a^2 = 17 + \sqrt{17^2 - 65}$.

2.



A: posição inicial
E: posição final
$\overline{AB} = 600 = \overline{BD}$
$\overline{DE} = 300$.
Note que $AB \parallel DE$.
Os triângulos ABC e EDC são semelhantes.
Assim:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = 2 \Rightarrow \overline{BC} = 400 \; e \; \overline{CD} = 200$$

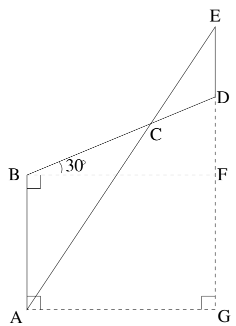
Aplicando a lei do cosseno ao $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}
\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos B \\
&= 600^2 + 400^2 - 2 \cdot 600 \cdot 400 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 36 \times 10^4 + 16 \times 10^4 + 24 \times 10^4 \\
&= 76 \times 10^4 = 19 \times 2^2 \times 10^4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 200\sqrt{19} \Rightarrow \overline{EC} = 100\sqrt{19}$$

Logo, $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{EC} = 300\sqrt{19}$m.

Ou



$\triangle$BFD:

$$\text{sen}30^{\circ} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DF}}{600} \Rightarrow \overline{DF} = 300$$

$\overline{GF} = \overline{AB} = 600 \Rightarrow \overline{EG} = \overline{ED} + \overline{DF} + \overline{FG} = 300 + 300 + 600 = 1200$
$\overline{AG} = \overline{BF}$. Mas

$$\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DF}^2 = 600^2 - 300^2 = 3 \cdot 300^2$$

$\overline{AG} = \overline{BF} = 300\sqrt{3}$.
$\triangle$AGE:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{EG}^2 = 3 \cdot 300^2 + 1200^2 = 19 \cdot 300^2$$

$\Rightarrow \overline{AE} = 300\sqrt{19}$m.

3. Após um certo número de anos a pessoa terá comprado, no total, exatamente n caixas de velas, cuja soma de todas as suas velas á igual à soma das idades comemoradas.
   Seja $m (m > 17)$ a idade em que, ao comemorar o aniversário, não sobra mais vela nenhuma. Então:

$$12n = \sum_{j=17}^{m} j = \frac{(17+m)(m-17+1)}{2} = \frac{(m+17)(m-16)}{2}$$

   Portanto: $(m + 17)(m - 16) = 24n$
   Para achar uma solução (qualquer) imediata para o problema, basta encontrar o menor m tal que $m + 17$ seja múltiplo de 24, e tal que $m > 16$. Tome então $m = 31$. (note que para que $m - 16$ seja múltiplo de 24, devemos tomar $m = 40 > 31$). A solução $m = 31$ é uma cota superior. Devemos verificar se há soluções menores (ou seja, $16 < m < 31$).
   Para tanto, observe que $24 = 2^3 \cdot 3$. Como $24n$ é par, e como, nos fatores $m + 17$ e $m - 16$, estamos somando m com um número ímpar e par respectivamente, não podemos considerar as possibilidades para $m + 17$ e $m - 16$:

   $m + 17$ múltiplo de 2^2 <u>e</u> $m - 16$ múltiplo de $2 \cdot 3$, <u>ou</u>
   $m + 17$ múltiplo de 2 <u>e</u> $m - 16$ múltiplo de $2^2 \cdot 3$.

   Resta-nos considerar:

   (a) $m + 17$ múltiplo de 3 e $m - 16$ múltiplo de 2^3
   Note que m ímpar deve ser eliminado pois produz $m - 16$ ímpar.

m	19	22	25	28	31	34
$m + 17$	36	39	42	45	48	51
m - 16	3	6	9	12	15	18

(b) $m - 16$ múltiplo de 3 e $m + 17$ múltiplo de 2^3
Note que m par deve ser eliminado pois produz $m + 17$ ímpar.

m	19	22	25	28	31
m - 16	3	6	9	12	15
$m + 17$	36	39	42	45	48

A resposta é: 31 anos.

4. (a) Duas pesagens: Coloca-se 3 bolas em cada prato e aí determina-se o grupo de 3 bolas onde está a mais pesada.
Com mais uma pesagem (1 bola em cada prato e 1 fora) determina-se a mais pesada.

Obs: Note que com duas pesagens podemos determinar a mais pesada até um conjunto de 9 bolas (3 bolas em cada prato e 3 fora - determinado o grupo de 3 bolas onde está a mais pesada, necessitaremos mais uma pesagem). Já com $10 = 3^2 + 1$ é impossível determinar a bola mais pesada com duas pesagens (em qualquer divisão de grupos de bolas iguais para os dois pratos, teremos algum grupo com pelo menos 4 bolas, que necessitará mais duas pesagens).

(b) De 10 a $27 = 3^3$, necessitaremos três pesagens: podemos dividir os grupos em três (dois grupos iguais para os pratos da balança e um terceiro de fora) onde um grupo com no máximo 9 bolas. Pela observação anterior, basta mais duas pesagens para se determinar a bola mais pesada.

Por um raciocínio análogo ao raciocínio em (b), pode-se ver que com um conjunto de $28 = 3^3 + 1$ até $81 = 3^4$, necessitaremos quatro pesagens. Raciocinando intuitivamente, vemos que, para um conjunto com k bolas, $3^{n-1} < k \leq 3^n$, necessitaremos n pesagens: divide-se as k bolas em três grupos de forma que cada grupo tenha no máximo 3^{n-1} bolas. Um grupo de 3^{n-1} bolas necessitará $n - 1$ pesagens.

Indução sobre n: verdadeiro para $n = 1$: $1 \leq k \leq 3$ - uma pesagem. Suponha válido para n. Para $n + 1$, ou seja, $3^n + 1 \leq k \leq 3^{n+1}$. Divida as k bolas em três grupos de modo que cada grupo tenha no máximo 3^n bolas. Realize uma pesagem. Um dos grupos com no máximo 3^n bolas conterá a bola mais pesada. Necessita-se então mais n pesagens.

5. Início

balde de 8ℓ	balde de 5ℓ	balde de 3ℓ
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

Com um volume de 10ℓ, em um balde de 10ℓ e mais dois baldes vazios, um de 6ℓ e outro de 3ℓ, não é possível fazer a divisão em duas partes iguais pois o balde de 6ℓ, em qualquer momento, ou estará vazio, ou estará cheio com 6ℓ de água, ou conterá 3ℓ de água (passando, de cheio, 3 l para o balde menor); o balde de 3ℓ estará, ou vazio ou cheio com 3ℓ de água. Portanto, as únicas configurações possíveis são:

10	0	0
4	6	0
4	3	3
7	3	0
7	0	3
1	6	3

Premiados

(em ordem alfabética por nível e por tipo de medalha)

Nível 1

Ouro

- José Artur Silveira Teixeira (Colégio Dom Jaime Câmara)

Prata

- Guilherme Claudino (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Guilherme Rohden Echelmeier (Colégio de Aplicaçào da UNIVALI)
- Márcio Lucas Maes Júnior (Educandário Imaculada Conceição)
- Rodrigo Parisi Freitas (Educandário Imaculada Conceição)

Bronze

- Filippe Frigo Furtado (Centro Educacional Visão)
- Gabriela Stein Zacchi (Centro Educacional Menino Jesus)
- Guilherme S. Wolff (Centro Educacional Menino Jesus)
- Lucas Veit Braun (Educandário Imaculada Conceição)
- Mercedes Caroline Sales Ferber (Educandário Imaculada Conceição)
- Nelisa Helena Rocha (Centro Educacional Menino Jesus)
- Newton Carvalho Soares Nascimento (Educandário Imaculada Conceição)
- Vicente Matheus Moreira Zuffo (Escola de Aplicação de Videira)
- Willian Koerich de Souza Weschenfelder (Colégio Carrossel)

Menção Honrosa

- Bruno Bernardo Teixeira (Colégio Carrossel)
- Guilherme Zapelini Kurschus (Educandário Imaculada Conceição)
- Hanna Kurihara e Silva (Escola Básica M. Beatriz de Souza Britto)
- Josias Humberto Soares (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Júlio Maria Teixeira Motta (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Laís Lídia Frey (Colégio de Aplicação de Videira)
- Rodrigo Ferreira (Colégio Centro Educacional Visão)

Nível 2

Ouro

- Felipe Paupitz Schlichting (Colégio Coração de Jesus)
- Lucas Lolli Savi (Colégio Catarinense)

Prata

- Déborah Silva Alves (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Geyson Brustolin (Colégio Centro Educacional Visão)
- Joel Boeng (Educandário Imaculada Conceição)

Bronze

- Arthur Eduardo Schutz (Colégio Carrossel)
- Douglas Kazumi Lopes Ugochi (Educadário Imaculada Conceição)
- Flora Moritz da Silva (Educandário Imaculada Conceição)
- Leonardo Badalotti Brandão (Educanário Imaculada Conceição)
- Melina Ribeiro Curi (Escola Básica M. Beatriz de Souza Britto)
- Viviam Giacomelli Pedroso (Colégio Coração de Jesus)

Menção Honrosa

- Bruna Ghizoni Vieira (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Bruno Leonardo Schneider(Colégio Dom Jaime Câmara)
- Karine Piacentini Coelho da Costa (Escola Básica M. Beatriz de Souza Britto)

Nível 3

Ouro

- Gabriel Weiss Maciel (Colégio Catarinense)
- Jairo Krás Mengue (Escola Agrotécnica Federal de Sombrio)

Prata

- Bruno Henrique de Abreu (Colégio Catarinense)
- Filipe Borin da Silva (Escola Agrotécnica Federal de Sombrio)
- João Felipe Almeida Destri (Colégio Coração de Jesus)

Bronze

- Leonardo B. Roncatto (Curso e Colégio Energia)
- Priscila Scheidt (Colégio Dom Jaime Câmara)
- Rafael Hiebert (Colégio de Aplicação da UNIVALI)
- Viriato Corrêa Pahin (Colégio de Aplicação UNIVALI)
- Walney Agílio Raymondi (Colégio de Aplicação da UNIVALI)

Escolas Participantes

1. Centro Educacional Aconchego Ltda (Balneário Camboriú)
2. Centro Educacional Menino Jesus (Florianópolis)
3. Centro Educacional Príncipe Ali (São José)
4. Centro Educacional Visão (São José)
5. Colégio Carrossel (Palhoça)
6. Colégio Catarinense (Florianópolis)
7. Colégio Coração de Jesus (Florianópolis)
8. Colégio Dom Jaime Câmara (São José)
9. Colégio Energia (Florianópolis)
10. Colégio Marista (Criciúma)
11. Colégio da Lagoa (Florianópolis)
12. Colégio da Polícia Militar Feliciano Nunes Pires (Florianópolis)
13. Colégio de Aplicação - UFSC (Florianópolis)
14. Colégio de Aplicação da UNIVALI (Itajaí)
15. Educandário Imaculada Conceição (Florianópolis)
16. Escola Agrotécnica Federal de Sombrio (Santa Rosa do Sul)
17. Escola Básica Maria Beatriz de Souza Brito (Florianópolis)
18. Escola Técnica Federal de Santa Catarina - ETFSC (Florianópolis)
19. Escola de Aplicação de Videira (Videira)
20. Ilha Tendência (Florianópolis)
21. Instituto Educacional CVE (São Miguel do Oeste)

Artigo

Euclides, Hilbert e o Rigor em Geometria

Eliezer Batista

Dep. de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina
CEP: 88.040-900, Florianópolis-SC

Resumo

Neste artigo veremos alguns aspectos da evolução histórica do padrão de rigor utilizado pelos matemáticos. Em particular iremos explorar a formulação da geometria plana descrita nos “Elementos” de Euclides e sua contraparte moderna, exposta por David Hilbert. Nossa meta é identificar dois aspectos da atividade matemática complementares, porém não excludentes. De um lado, a atividade criativa, envolvendo a gênese de novas idéias e a resolução de problemas desafiadores. De outro lado, a escrita e divulgação de idéias matemáticas, que está sujeita e é delineada pelos critérios formais de exatidão, que podem ficar cada vez mais elaborados com o passar do tempo.

Introdução

Qual a relevância de um artigo de cunho histórico em uma revista de Olimpíadas de Matemática? A priori, seria de se esperar a exposição de problemas curiosos e sofisticados que envolvessem um bocado de engenho e arte em suas resoluções. Ou talvez uma introdução elementar de algumas ferramentas matemáticas que ajude na resolução de problemas e que em geral não são abordadas no ensino regular. Mas a minha justificativa para tal empreendimento é o fato de a matemática ser uma atividade coletiva. A atividade matemática envolve não só o indivíduo em seu momento criativo, mas também a escrita e divulgação do conhecimento matemático, que envolve uma série de regras formais.

A maioria dos leitores deve ter passado por alguma decepção ao perceberem que sua pontuação em um teste de matemática foi muito aquém do esperado.

Desconsiderando-se os casos óbvios de erros de cálculo ou falta de atenção, muitas vezes aconteceu de o resultado até ser intuído corretamente, mas a escrita apresentava várias lacunas de raciocínio que invalidavam toda a solução. Há uma necessidade de que o texto escrito em matemática apresente um encadeamento lógico de tal forma que os resultados obtidos sejam conseqüência tão somente de premissas básicas que possam ser aceitas sem muita discussão e de outros resultados anteriormente obtidos com base nestas mesmas premissas. A estas premissas básicas que servem como início de todo encadeamento lógico, denominamos axiomas, ou postulados. O processo de encadeamento lógico para a obtenção de novos resultados matemáticos é denominado demonstração e os resultados estabelecidos através de demonstrações são denominados teoremas.

Devemos deixar claro duas coisas com respeito à demonstração em matemática: Em primeiro lugar, a demonstração matemática envolve bem mais que a simples concatenação mecânica de axiomas e regras lógicas. Há uma boa dose de intuição ao se procurar um novo resultado geral em matemática que pode ser formulado antes mesmo de haver uma demonstração formal. Também no próprio processo de demonstração, a mente é capaz de elaborar estratégias e fazer conexões que não estavam evidentes na simples seqüência de raciocínio. Em segundo lugar, é necessário que se diga que estas regras formais para a demonstração são intrínsecas à própria estrutura da matemática. Não se pode aceitar um resultado matemático como geralmente válido, por mais ampla que seja sua verificabilidade em casos particulares, a não ser que este resultado tenha passado pelo escrutínio rigoroso do processo de demonstração matemática.

Por outro lado, devido ao desenvolvimento da própria matemática através dos tempos, novas perguntas vão sendo feitas e o controle de qualidade no que diz respeito ao rigor nas demonstrações tende a ficar mais apurado. Por isto, faz-se necessário muitas vezes rever os resultados obtidos no passado sob a ótica do conhecimento matemático presente. Esta revisão é feita não porque os resultados apresentem falhas lógicas, mas porque o desenvolvimento da matemática revelou novas sutilezas que os autores originais jamais poderiam ter imaginado, o que fragiliza alguns pontos das demonstrações ou mesmo pode invalidar algumas conclusões.

Neste artigo, vamos tomar como exemplo os fundamentos da geometria plana. A geometria é quase tão antiga quanto a atividade de contagem, pois muito cedo na história do homem viu-se a necessidade de medidas de distâncias e de áreas, tanto na construção civil como na agricultura. A princípio, a geometria se constituiu de regras "ad hoc" de medição e cálculos de áreas e atingiu um certo grau de sofisticação nas civilizações egípcia e babilônica [1]. Mas foi somente na Grécia que a geometria começou a ser concebida como uma disciplina cujos resultados deveriam ser de caráter geral e demonstrados por um processo formal. Foi Thales de Mileto o primeiro geômetra no sentido atualmente aceito para o termo. Depois dele, muitos outros resultados geométricos foram obtidos ao longo de séculos de história, envolvendo técnicas e argumentos de uma beleza inestimável. A geometria grega é um exemplo colossal de realização do intelecto humano!

A maior síntese disponível do conhecimento geométrico produzido na Grécia antiga encontra-se nos 13 livros dos "Elementos" de Euclides de Alexandria [2]. Estes 13 volumes não só listam os resultados obtidos por antecessores e pelo próprio Euclides, mas os colocam de uma maneira ordenada e logicamente concatenada, ressaltando qual a dependência de cada um dos resultados em relação aos anteriores. Reintroduzidos no ocidente por intermédio dos árabes, os "Elementos" foram considerados por séculos como o padrão de rigor na formulação de problemas e resultados geométricos e de uma forma mais ampla para toda a Matemática e outras ciências[1]. Somente no início do século XIX, com a descoberta da possibilidade da existência de geometrias não Euclidianas e posteriormente com a compreensão da estrutura do conjunto de números reais que se fez necessária uma volta aos fundamentos da geometria sob uma nova ótica. Esta tarefa foi magistralmente executada por David Hilbert em sua obra "Grundlagen der Geometrie" (Fundamentos da Geometria) [4].

A Geometria de Euclides

Nesta seção, destacaremos alguns pontos que elucidarão bem a questão do rigor na geometria grega e sua inadequação para os padrões atuais. Em primeiro lugar, é necessário destacar que grande parte da geometria feita pelos gregos está relacionada a construções geométricas com régua e compasso. Diga-se de passagem, a régua sendo utilizada apenas para traçar segmentos de reta e não como um instrumento de medida e o compasso sendo colapsável, isto é, que se fecha quando não está traçando um arco de circunferência. Portanto, também não era permitido simplesmente abrir o compasso com a medida do segmento desejado e transferir para outro lugar. Um dos objetivos da obra de Euclides é

[1]Note por exemplo que o livro "Principia Mathematica" de Sir. Isaac Newton [5], que lança a pedra fundamental para a mecânica moderna e para o cálculo infinitesimal foi redigido seguindo os padrões formais dos "Elementos"

colocar sobre uma base sólida todos os métodos de construção geométrica desenvolvidos anteriormente, através de axiomas e teoremas superar as limitações físicas dos instrumentos de desenho. Logo nas primeiras proposições do livro I dos "Elementos" procura-se exatamente garantir que sempre é possível transferir um segmento dado para qualquer outro lugar utilizando régua e compasso.

O livro I dos "Elementos" lança os ingredientes necessários para desenvolver toda a geometria plana. Temos um total de 23 definições dos objetos geométricos envolvidos ao longo de todas as demonstrações posteriores. Após, o autor enumera 5 postulados[2] que são afirmações a respeito das propriedades das figuras geométricas que pareciam ser auto-evidentes e portanto poderiam ser assumidas sem demonstração. A história veio a mostrar que aquelas afirmações não eram tão auto-evidentes assim. Por último, são enumeradas 5 noções comuns, que também são axiomas mas de um caráter mais geral, não relacionados especificamente com figuras geométricas. Neste artigo, não abordaremos as noções comuns de Euclides.

Analisando primeiro as definições de Euclides [2], pode-se ver que as primeiras 7 definições são uma tentativa de verbalizar as noções intuitivas de ponto, reta e plano advindas da experiência visual. Veremos mais tarde que esta é uma tarefa que nenhum geômetra na atualidade se dispõe a fazer, relegando a estes objetos o título de conceitos primitivos. Devido à limitação de espaço, vamos nos ater às definições de 8 a 12, que tratam de ângulos no plano:

Definição 8 Um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas que se cruzam em um plano e não estão sobre a mesma reta.

Definição 9 E quando as linhas contendo o ângulo são retas, o ângulo é denominado retilíneo.

Note que a definição de ângulo depende de um conceito não definido claramente, a saber, a "inclinação recíproca". De qualquer forma, a definição de ângulo oferecida é do tipo relacional, isto é, uma relação existente entre duas linhas. Já na definição 9, a expressão "as linhas contendo o ângulo", sugerem mais a noção que o ângulo é a região contida entre as duas linhas, portanto, a definição de ângulo passa a ser do tipo qualitativa, isto é, um objeto geométrico[3].

[2] A palavra postulado é a mesma palavra que axioma, que podemos usar indistintamente. Mas por fidelidade literária, quando nos referirmos aos "Elementos" utilizaremos a palavra postulado

[3] Não utilizamos a palavra figura pois esta tem um significado bem específico, dado na definição 14 dos "Elementos"

Prosseguindo com as definições:

Definição 10 Quando uma linha reta incidente sobre outra linha reta forma ângulos adjacentes iguais, cada um destes ângulos é reto, e a linha reta incidente é denominada uma perpendicular à reta sobre a qual incide.

Definição 11 Um ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

Definição 12 Um ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

Note que estas definições utilizam conceitos de comparação ou de medida, fala-se de "ângulos adjacentes iguais", "ângulo maior que um ângulo reto", "ângulo menor que um ângulo reto". Portanto, sugere-se aqui uma definição do tipo quantitativa de ângulo. Diga-se de passagem, nem sequer se menciona neste ponto quais os critérios ou processos pelos quais se possam comparar ou medir ângulos, somente na proposição 23 do livro I [4] que é demonstrado que é possível se transferir um ângulo e portanto comparar dois ângulos distintos. Logo estas definições no contexto onde elas são colocadas ficam vazias. Na próxima seção voltaremos a esta questão e daremos uma definição moderna e mais precisa do que vem a ser um ângulo.

Considere agora os postulados do primeiro livro dos "Elementos" de Euclides[5]:

Postulado 1 É possível traçar uma linha reta entre quaisquer dois pontos.

Postulado 2 É possível estender um segmento de reta continuamente em ambas as direções a partir de suas extremidades.

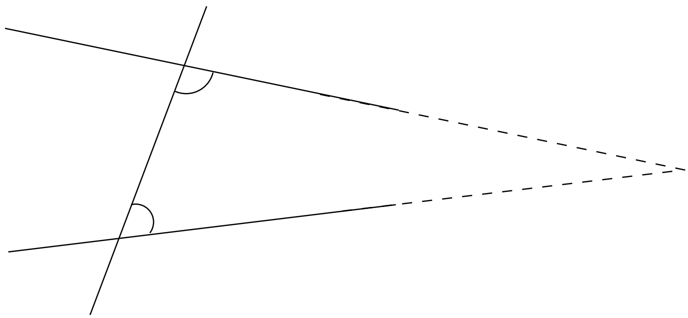
Postulado 3 É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Postulado 4 Todos os ângulos retos são iguais.

Postulado 5 Se uma linha reta, cruzando outras duas fazem com que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor que dois ângulos retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente se cruzam do mesmo lado onde estão os dois ângulos mencionados.

[4] Os teoremas no livro dos "Elementos" são denominados proposições. Mais uma vez, por uma questão de fidelidade literária, preservaremos esta denominação.

[5] Na redação dos postulados foi tomada uma certa liberdade estilística por questão de clareza e simplicidade. Pedimos desculpas ao leitor que tenha conhecimento da redação original dos postulados de Euclides.



Observe que os três primeiros postulados estabelecem a possibilidade de construção geométrica independentemente de qualquer limitação física dos aparelhos de desenho. É interessante notar também que no postulado 1 não se tem a preocupação com a unicidade da reta determinada por dois pontos por ser uma coisa "auto-evidente" pela intuição visual. O quarto postulado possui uma natureza diferente, ele procura estabelecer um padrão absoluto de medida de ângulo, a saber, o ângulo reto. Esta é a unidade mais natural, matematicamente falando, de medida de ângulo, a partir desta unidade, pode-se criar sub-divisões ou múltiplos e medir-se qualquer ângulo [6].

O postulado 5, também conhecido como postulado das paralelas, é o de formulação mais complexa e é o cerne da geometria "Euclidiana". Devido ao seu caráter um pouco menos auto-evidente, o próprio Euclides tentou obter o maior número de resultados possível somente utilizando apenas os quatro primeiros postulados. Somente na demonstração da proposição 27 do livro I que pela primeira vez se necessitou do postulado 5. Muitos autores ao longo da história fizeram tentativas, porém sem sucesso, de demonstrar o quinto postulado assumindo os quatro primeiros. Somente no início do século XIX, com János Bolyai, Carl Friedrich Gauss e Nikolai Ivanovich Lobachevski, que foi rompido definitivamente este compromisso com o quinto postulado, surgindo assim as geometrias não euclidianas. A história da discussão em torno do quinto postulado e suas conseqüências para o avanço da matemática nos renderia um outro artigo, o leitor interessado poderá consultar o enpolgante livro de Marvin J. Greenberg [3], que relata a história do surgimento da geometria não euclidiana como também é uma referência básica tanto para os axiomas

[6] A subdivisâo sexagesimal de ângulos ainda utilizada nos dias de hoje com as unidades, grau, minuto e segundo possuem uma motivação astronômica e um sistema assim já era utilizado pelos Babilônios.

modernos da geometria euclidiana e da geometria hiperbólica.

Por fim, vamos analisar uma demonstração nos "Elementos" de Euclides:

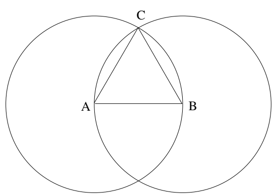
Proposição 1 Construir um triângulo equilátero a partir de um segmento dado.

Demonstração: Seja o segmento $\overline{AB}$

A ———————————————— B

Sejam as circunferências de centro A e raio AB e a de centro B e raio AB (postulado 3)

Seja agora o ponto C de cruzamento das duas circunferências, conforme visto na figura abaixo:



Por definição (definição 15, de circulo e circunferência) $AC = AB$ e $BC = AB$, portanto $AC = BC$ (noção comum 1: Se duas coisas são iguais a uma terceira, são iguais entre si). Logo o triângulo ΔABC é equilátero. QED

Esta demonstração aparentemente está perfeita, todos os passos devidamente justificados, mas se verificarmos com cuidado, veremos que a demonstração faz uma suposição que não está presente nem nos postulados, nem nas noções comuns e como este é o primeiro resultado demonstrado, não está baseado em nenhum resultado anterior: A pressuposição que existe um ponto na intersecção das duas circunferências traçadas está longe de ser trivial e advém da completude do conjunto dos números reais (e por conseguinte do plano). Este resultado somente foi provado por Dedekind no final do século XIX e portanto não poderia de qualquer maneira estar contido no livro de Euclides. Por outro lado, a pergunta sobre a existência ou não do ponto de intersecção até poderia ter sido levantada naquela época, muito embora seria considerada irrelevante pois era "óbvio" que o plano era contínuo e não poderia ter buracos.

Os Fundamentos da Geometria de Hilbert

Como vimos anteriormente, existem épocas na história da matemática onde se revisam os conceitos anteriores sob a ótica das novas descobertas incorporadas ao corpo de conhecimento matemático. Houve duas motivações históricas principais para esta reformulação da geometria. A primeira delas foi o surgimento de geometrias não euclidianas que sacudiram fortemente as convicções que prevaleceram durante mais de vinte séculos de que a geometria euclidiana era a única possibilidade lógica existente. A segunda causa foi o sucesso obtido na construção dos números reais. A partir desta construção, todo o cálculo infinitesimal pode ser colocado sobre um sólido fundamento de natureza aritmética, elevando a análise matemática ao nível de padrão de rigor a ser seguido por outros ramos da matemática, status este outrora ocupado pela geometria.

David Hilbert, em sua obra monumental "Grundlagen der Geometrie" (Fundamentos da Geometria, 1898), estendeu à geometria o caráter formal que haviam sido impingidos à aritmética e à análise. Seu ponto de vista sobre a necessidade de abstração dos conceitos familiares da geometria pode ser resumido em uma frase de sua autoria: "Deve-se sempre poder substituir 'pontos, retas, planos' por 'mesas, cadeiras, canecas de cerveja"'. Ficou claro que nem todos os termos em matemática podiam ser definidos, sendo assim, seu tratamento da geometria iniciou com três objetos não definidos, como ponto, reta e plano. Também estes objetos satisfazem relações não definidas entre si, como "estar sobre", "estar em", "estar entre" e "ser congruente". Estas relações, embora não definidas, ficam completamente estabelecidas através de cinco grupos de axiomas: Axiomas de Incidência, Axiomas de Ordem, Axiomas de Congruência, Axioma das Paralelas e Axiomas de Continuidade.

Axiomas de Incidência

Os axiomas deste grupo estabelecem as relações básicas, entre pontos e retas, pontos e planos e retas e planos como expressas a seguir:

Axioma I1: Dados quaisquer dois pontos A, B, existe uma linha a, que contém a ambos.

Axioma I2: Dados quaisquer dois pontos A, B, não existe mais que uma linha contendo a ambos.

Alguns comentários devem ser feitos neste ponto. Em primeiro lugar, a palavra "linha" subentende-se linha reta[7]. Em segundo lugar, fica subentendido que ao nos referirmos a dois pontos, ou duas linhas, ou dois planos, os mesmos serão distintos. A palavra "contém" escrita nos dois axiomas é que expressa a relação não definida de incidência. Outras palavras podem ser utilizadas em outros contextos para significar esta mesma idéia, como por exemplo, "a reta a passa por A e por B", "a reta a liga os pontos A e B", etc. Também podemos expressar esta relação entre outros objetos, por exemplo "a reta a cruza com a reta b", "a reta a tem um ponto em comum com a reta b", "o ponto A está sobre o plano α", "a reta a pertence ao plano α", etc.

Note que o Axioma I1 é equivalente ao Postulado 1 de Euclides, mas o Axioma I2, vem completar uma preocupação que não havia em Euclides, a saber, sobre a unicidade da reta definida por dois pontos.

Axioma I3: Existem pelo menos dois pontos sobre uma linha. Existem pelo menos três pontos que não estão sobre a mesma linha (não colineares).

Os axiomas I1-I3 são os axiomas planos de incidência. Toda a informação sobre incidência necessária para se fazer geometria plana está contida nestes três primeiros axiomas. Os próximos axiomas de incidência são os axiomas espaciais de incidência e vamos mencioná-los por uma questão de completeza.

Axioma I4: Para quaisquer três pontos A, B, C, não colineares, existe um plano α que os contém. Para todo plano, existe um ponto nele contido.

Axioma I5: Para quaisquer três pontos A, B, C, não colineares, existe somente um plano que os contém.

Axioma I6: Se dois pontos A, B de uma linha a estão sobre um plano α, então todo ponto da linha a está sobre α.

Axioma I7: Se dois planos α, β têm um ponto A em comum, então eles têm pelo menos mais um ponto B em comum.

Axioma I8: Existem pelo menos quatro pontos que não estão sobre o mesmo plano (não coplanares).

Note que o axioma I7 garante que o espaço em questão possui dimensão não maior que três, enquanto o axioma I8, garante que a dimensão do espaço em questão não pode ser menor que três. Logo a geometria tratada pelos Axiomas I1-I8 é uma geometria tridimensional (espacial). Em sua totalidade, no entanto, estes axiomas permitem-nos avançar muito pouco no que diz respeito à geometria como de fato a conhecemos. Convém ressaltar inclusive que há vários

[7] Ao longo das discussões utilizaremos a palavra "reta", mas ao transcrevermos os axiomas utilizaremos "linha" apenas por uma questão de fidelidade ao texto original

conjuntos finitos de pontos que satisfazem perfeitamente a todos estes axiomas.

Axiomas de Ordem

Os axiomas de ordem tratam da separação entre pontos, ou da relação de "estar entre". Sua simplicidade aparente não pode obliterar a profundidade imensa deste grupo de axiomas. Como conseqüência deste grupo de axiomas podemos concluir que a geometria possui uma quantidade infinita de pontos. Também podemos definir subconjuntos interessantes de uma reta, como semi-retas e segmentos assim como subconjuntos do plano, como semi-planos ou interiores e exteriores de curvas fechadas. Finalmente devemos lembrar que o Postulado 2 de Euclides está implícito na formulação deste grupo de axiomas.

Axioma O1: Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C, então os pontos A, B, C são três pontos distintos de uma linha e B também está entre C e A.

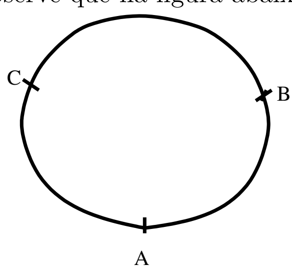
Vamos utilizar a notação $[A, B, C]$ para dizermos que B está entre A e C. Assim o primeiro axioma diz em particular que se $[A, B, C]$, então $[C, B, A]$.

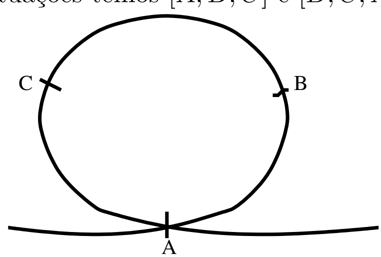
Axioma O2: Dados dois pontos A e C, existe sempre um ponto B na linha AC tal que C está entre A e B.

Basicamente, este exioma, se pensado simetricamente em relação aos pontos A e B, é o equivalente ao Postulado 2 de Euclides, pois o que está sendo dito é que uma reta sempre pode ser extendida arbitrariamente em ambas as direções.

Axioma O3: Dados quaisquer três pontos sobre uma linha, não existe mais do que um ponto que está entre os outros dois.

Dito de outra maneira, o axioma O3 diz que dados A, B e C colineares, apenas uma das possibilidades ocorre: ou $[A, B, C]$, ou $[A, C, B]$ ou $[B, A, C]$. Este axioma diz que a reta não pode ser uma curva fechada ou conter laços. Observe que na figura abaixo, nas duas situações temos $[A, B, C]$ e $[B, C, A]$





Com apenas estes três axiomas iniciais podemos definir segmentos de reta e semi-retas.

Definição 1 *Dados dois pontos A e B, o segmento $\overline{AB}$ é o conjunto formado pelos pontos A, B e por todos os pontos entre A e B, ou seja*

$$\overline{AB} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C \in \overleftrightarrow{AB} | [A, C, B]\}.$$

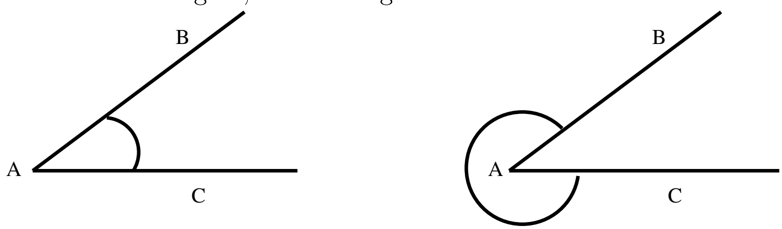
A semi-reta $\overrightarrow{AB}$ é a união do segmento $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos C tais que B está entre A e C,

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \in \overleftrightarrow{AB} | [A, B, C]\}.$$

Agora podemos voltar à definição de ângulo, que como vimos ficou obscura nos "Elementos" mas que agora temos condições de dar uma definição precisa:

Definição 2 *Dados três pontos não colineares A, B e C, definimos o ângulo $B\hat{A}C$ como a união das duas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.*

Esta definição exclui os casos de ângulo nulo e de ângulo raso. A primeira vista, esta definição parece ser ambígua, pois não sabemos por exemplo de que forma considerar o ângulo, como na figura abaixo



Mas esta ambigüidade pode ser sanada com algumas definições adicionais:

Definição 3 *Dados uma reta r e dois pontos A e B que não estão sobre r, dizemos que A está do mesmo lado que B em relação a r se o segmento $\overline{AB}$ não cruza r. Caso contrário, dizemos que os pontos A e B estão de lados opostos em relação a r.*

Definição 4 *Dado o ângulo $B\hat{A}C$, definimos seu interior como a intersecção do conjunto dos pontos no plano que estão do mesmo lado que B em relação a $\overleftrightarrow{AC}$ com o conjunto dos pontos que estão do mesmo lado que C em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.*

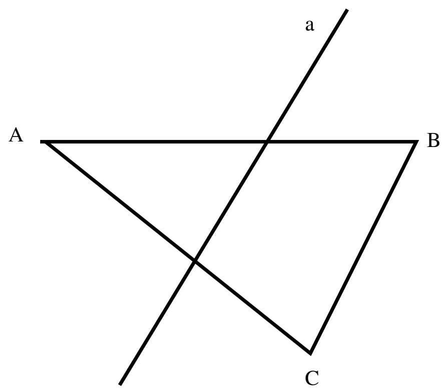
Veja que esta definição deixa claro a distinção entre o ângulo e a região do plano interior ao ângulo, coisa que não ficava em absoluto claro no livro dos "Elementos". Note também que não se faz qualquer menção por enquanto à medida do ângulo ou à medida de um segmento, e mesmo após os axiomas de congruência, será possível comparar ângulos e segmentos, no sentido de dizer se são iguais ou se um é menor que o outro sem no entanto associar a cada um destes objetos um número que seria sua medida.

Finalmente, temos um axioma forte que nos permite deduzir os resultados mais profundos, para isto temos que definir o que é um triângulo.

Definição 5 *Dados três pontos não colineares A, B e C, o triângulo ΔABC é a união dos interiores dos ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$.*

Axioma O4: Sejam A, B, C três pontos não colineares e seja a uma linha no plano ABC que não passa por nenhum dos três pontos A, B, C. Se a linha passa por um ponto do segmento $\overline{AB}$, então também passa por um ponto do segmento $\overline{AC}$ ou por um ponto do segmento $\overline{BC}$.

Expresso intuitivamente, se uma reta entra em um triângulo, ela tem que sair do mesmo.



Com estes axiomas é possível provar, por exemplo, que entre quaisquer dois pontos de uma reta existe sempre um ponto entre eles. Isto elimina a possibilidade de modelos discretos para a geometria, mas ainda não garante a completude da reta, isto é, o fato de a reta não ter buracos. Outro resultado que pode ser demonstrado como conseqüência destes axiomas é que dados n pontos A_1, A_2, ..., A_n sobre uma reta, é sempre possível ordená-los de forma que $[A_k, A_{k+1}, A_{k+2}]$ para todo k entre 1 e $n-2$. Isto exclui a possibilidade da reta possuir ramificações e também nos diz que podemos definir uma relação de ordem total em cada reta. Um último tipo de resultado que mencionaremos como conseqüência direta dos axiomas de ordem é um teorema que diz que toda curva poligonal (união de segmentos de retas não colineares tais que o ponto de extremidade final de um segmento é o mesmo ponto de extremidade inicial do próximo) fechada (o final do último segmento é igual ao início do primeiro) e simples (não há intersecções entre quaisquer dois segmentos que não sejam contíguos) divide o plano em duas regiões, a de dentro e a de fora.

Axiomas de Congruência

Este grupo de axiomas permite compararmos segmentos e ângulos mesmo sem nos referirmos diretamente a números que seriam as suas medidas, muito embora é possível definir a medida de um segmento ou ângulo a partir das relações de congruência.

Axioma C1: Se A e B são dois pontos sobre uma linha a e A' é um ponto sobre a mesma linha ou sobre uma outra linha a', então é sempre possível encontrar um ponto B' em um determinado lado da reta a' a partir de A' de modo que o segmento $\overline{AB}$ seja congruente ao segmento $\overline{A'B'}$. Em símbolos

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}.$$

O axioma garante a possibilidade de construir um segmento congruente a outro a partir de um ponto sobre uma semi-reta. A unicidade deste segmento na semi-reta dada pode ser demonstrada como teorema a partir dos axiomas. Um outro detalhe importante aqui é que o Postulado 3 de Euclides decorre automaticamente deste axioma.

Com a ajuda deste axioma e dos axiomas de ordem, podemos definir o que significa um segmento ser menor que o outro.

Definição 6 *Dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é menor que o segmento $\overline{CD}$ se existe um ponto $E \in \overline{CD}$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CE}$.*

Axioma C2: Se um segmento $\overline{A'B'}$ e um segmento $\overline{A''B''}$ são congruentes ao mesmo segmento $\overline{AB}$, então o segmento $\overline{A'B'}$ é congruente ao segmento $\overline{A''B''}$, ou abreviadamente, se dois segmentos são congruentes a um terceiro, eles são congruentes entre si.

Este axioma equivale à noção comum 1 de euclides quando restrita ao caso de segmentos. A partir destes axiomas também é possível provar que a relação de congruência satisfaz às propriedades reflexiva (ou seja, $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$), simétrica (ou seja, se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, então $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$) e transitiva (ou seja, se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$), como qualquer relação de equivalência.

Axioma C3: Sobre a linha a sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ dois segmentos que, exceto por B, não possuem ponto em comum. De igual modo, sobre a mesma linha ou sobre uma outra linha a' sejam $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ dois segmentos que, exceto por B', não possuem ponto em comum. Neste caso, se

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \quad \text{e} \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},$$

então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Este axioma equivale à noção comum 2 de euclides quando restrita ao caso de segmentos.

Agora teremos também um axioma para congruência de ângulos.

Axioma C4: Seja um ângulo[8] $A\hat{O}B$ em um plano α e uma linha a' sobre o mesmo plano ou sobre um outro plano α'. Então dado um ponto O' em a', existe um ponto A' sobre a' e um único ponto B' em cada um dos lados definidos por a' tais que

$$A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B'.$$

E todo ângulo é congruente a si mesmo.

Com isto também podemos dizer quando um ângulo é menor que o outro.

Definição 7 *O ângulo $A\hat{O}B$ é menor que o ângulo $A'\hat{O}'B'$ se existe um ponto C no interior de $A'\hat{O}'B'$ tal que $A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'C$.*

Axioma C5: Se para dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ as congruências

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \quad B\hat{A}C \equiv B'\hat{A}'C'$$

são satisfeitas, então a congruência $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$ também é satisfeita.

Deste axioma podemos deduzir todos os casos clássicos de congruência de triângulos (LAL, ALA, LLL) e todas as outras propriedades de congruência de

[8] Aqui utilizaremos a notação de ângulos a partir dos vértices que é mais clara. Sendo assim abriremos uma excessão para a fidelidade literária em relação ao original pois a notação utilizada por Hilbert não é comumente utilizada na literatura e portanto não familiar ao leitor

ângulos que não foram enunciadas como axiomas. O Postulado 4 de euclides também pode ser demonstrado a partir desta série de axiomas e inclusive teoremas profundos como a existência e unicidade de ponto médio de segmentos e de bissetrizes , o teorema do ângulo externo e a desigualdade triangular. Ao conjunto de todos os resultados de geometria que podem ser deduzidos somente a partir dos três primeiros grupos de axiomas damos o nome de geometria neutra.

O Axioma das Paralelas

Na verdade, este grupo de axiomas consiste de apenas um axioma e que como foi dito anteriormente constitui o cerne da geometria Euclidiana. Pode-se trocar este axioma por outro não equivalente, mas a geometria será radicalmente distinta.

Definição 8 *Dizemos que uma reta r é paralela a outra reta s se, r e s estão sobre o mesmo plano e r e s não possuem ponto em comum.*

Axioma P: Dados uma linha a e um ponto A não pertencente a ela, existe no máximo uma linha paralela a a passando por A.

Note que este axioma apenas limita o número máximo de paralelas pelo ponto, a garantia da existência de pelo menos uma paralela passando pelo ponto decorre dos resultados anteriores de geometria neutra.

Este Axioma também pode ser equivalentemente substituído por alguma das seguintes afirmações:

1. Se duas retas não têm ponto em comum com uma terceira, então não têm ponto em comum entre si.

2. Os ângulos alternos internos determinados por duas paralelas e uma transversal são congruentes.

3. A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois ângulos retos.

Somente a partir do axioma das paralelas que podemos utilizar as técnicas de semelhança de triângulos e o teorema de Thales, sobre proporcionalidade determinada por feixe de paralelas, para resolver problemas geométricos.

A primeira geometria não Euclidiana que surgiu foi a geometria hiperbólica, proposta por N. I. Lobachevski. Basicamente, a geometria hipérbólica consiste em empregar os axiomas dos três primeiros grupos e substituir o Axioma P pelo seguinte Axioma:

Axioma P': Dados uma linha a e um ponto A não pertencente a ela, existem pelo menos duas linhas paralelas a a passando por A.

As conseqüências deste axioma são espantosas. Um resultado surpreendente que podemos deduzir na geometria hiperbólica é que dado qualquer triângulo no plano hiperbólico, a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos do triângulo dado é proporcional à área do triângulo. Outra curiosidade da geometria hiperbólica que nos choca o senso comum é o fato de as retas paralelas não serem eqüidistantes entre si.

Um segundo exemplo de geometria não Euclidiana são as geometrias elípticas. As geometrias elípticas substituem o Axioma das paralelas pelo axioma que não existem retas paralelas. Mas a passagem não é tão suave como da geometria Euclidiana para a hiperbólica, pois existem axiomas de ordem que precisam ser modificados para garantir a consistência da geometria [3]. Não entraremos em detalhes sobre a geometria elíptica neste artigo pois esta envolve a formulação em termos de planos projetivos, o que foge ao escopo deste trabalho.

Axiomas de Continuidade

Este é o conjunto mais profundo de axiomas e que estão no limiar entre dois ramos da matemática, a saber, a geometria e a análise. Basicamente, estes axiomas garantem a completude da reta e do plano, e portanto a existência de pontos de intersecção de retas ou de quaisquer duas curvas no plano. Este era exatamente o lapso existente na demonstração da primeira proposição dos "Elementos" analisada anteriormente.

Axioma Co1: (Axioma de Arquimedes) Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos quaisquer, então existe um número natural n tal que n segmentos $\overline{CD}$ construídos a partir de A na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ ultrapassarão o ponto B.

A propriedade Arquimediana da reta é o que permite que qualquer distância possa ser medida com qualquer instrumento de medida linear de qualquer comprimento, ou seja, sua régua sempre será capaz de medir uma distância desejada.

Axioma Co2: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma linha com suas relações de ordem e congruência de forma a preservar as relações existentes entre os elementos originais bem como as propriedades fundamentais de ordem linear e congruência que decorram dos axiomas I, O, C e do axioma Co1 é impossível.

Este axioma possui uma formulação mais complicada mas que expressa uma idéia simples: é impossível por mais pontos na reta além dos que já existem. Dito de outro modo, significa também que a reta não tem buracos que precisem ser tapados. Este é o ponto de partida para efetuarmos processos de limite sobre a reta e fazermos o cálculo. A ponte entre a geometria e a aritmética pode ser transposta devido a este axioma, pois ele garante que o conjunto dos números reais é o melhor modelo (de fato, é o único) para as retas utilizadas na geometria Euclidiana.

Conclusão

Esperamos que o leitor tenha percebido a evolução dos conceitos matemáticos e a crescente sofisticação nas definições e nas demonstrações matemáticas. A geometria de Euclides foi de fato o primeiro sistema axiomático dedutivo que se tem conhecimento. Embora os resultados fossem expostos de uma maneira ordenada segundo a lógica da demonstração matemática, ainda assim a obra estava cheia de hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas. Somente séculos de desenvolvimento matemático puderam lançar uma nova luz sobre estes assuntos, colocando a disciplina sobre um fundamento mais sólido.

Após este pequeno estudo, quero destacar duas lições. Primeiramente, ao trabalharmos em matemática devemos nos esmerar para termos o raciocínio límpido e claro, evitando lacunas de raciocínio ou definições mal postas. Em segundo lugar, a certeza que acontecerá ainda muitas vezes de as gerações futuras encontrarem sutilezas que revelarão a necessidade de se revisar os fundamentos bem estabelecidos de teorias matemáticas que temos hoje em dia, colocando novos tijolos neste imenso edifício do conhecimento matemático.

Referências

[1] Boyer, Carl.B: "História da Matemática", 2ª Edição, Edgard Blücher (1996).

[2] Euclid: "The Thirteen Books of the Elements", Translated by Sir. Thomas Heath, 3 Vols. Dover (1956).

[3] Greenberg, Marvin J.: "Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History", W.H. Freeman and Co. (1974).

[4] Hilbert, David: "Foundations of Geometry", Open Court (1999).

[5] Newton, Isaac: "PRINCIPIA, Princípios Matemáticos de Filosofia Natural", Vol. 1 Edusp, Nova Stella (1990).

Problemas Propostos

1. Mostre que se p é um número primo maior do que 5 existe um número natural a, escrito só com algarismos 1, tal que a é múltiplo de p.
Exemplo: $p = 11$, $a = 11$; $p = 13$, $a = 111111$.

2. Se $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, provar que n pode ser escrito, em alguma base, com 3 algarismos, se e só se $n \neq 8$.

3. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Então

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{k_i} a_i} \right] \geq \frac{n}{n-1} \text{ , onde}$$

$$\delta_{k_i} = \begin{cases} 1, & \text{se } k \neq i; \\ 0, & \text{se } k = i. \end{cases}$$

4. Numa estranha ilha do planeta Z, a cada dia da semana, cada um dos habitantes ou mente o dia todo ou passa o dia todo dizendo a verdade. Todos os habitantes podem mentir em certos dias e dizer a verdade em outros, mas no decorrer de um mesmo dia da semana seu comportamento é constante. Para cada habitante A existe um habitante A' que diz a verdade nos mesmos dias em que A mente, e somente nesses dias. Em outras palavras, em qualquer dia no qual A minta, A' dirá a verdade, e, em qualquer dia no qual A diga a verdade, A' sempre mentirá. Uma outra característica desta ilha é que, para cada par de habitantes A e B, existe um habitante C que diz a verdade em todos os dias nos quais tanto A como B dizem a verdade, e em nenhum outro dia (ou seja, C mente em qualquer dia no qual pelo menos A ou B também minta). Dizem as más línguas que nessa ilha ninguém diz a verdade todos os dias. Esta acusação é verdade ou não?

   ("O enigma de Sherazade e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna", Raymond Smullyan)

5. Numa selva tropical há um hospital em que estão de serviço três cirurgiões: André, Bruno e Carlos. Suspeita-se que o chefe da tribo local tem uma doença rara que é altamente contagiosa. Os três cirurgiões têm

que operá-lo, um de cada vez. Para complicar a questão, qualquer dos três médicos pode ter apanhado a doença enquanto examinava o chefe tribal. Cada cirurgião deve usar luvas de borracha quando opera. Se tiver a doença, os seus germes infectam o lado interior da luva. E, se o chefe tem a doença, contaminará o exterior de qualquer luva usada. Acontece que só existem dois pares de luvas esterilizadas no hospital, um azul e um branco. É possível que os três cirurgiões operem o chefe sem que os cirurgiões ou o chefe corram o risco de apanhar a doença?

("Ah, descobri!", Martin Gardner)

6. Um número é chamado "número dobrado" se sua representação decimal consiste num bloco de algarismos não começados por zero, seguido imediatamente por outro bloco idêntico ao primeiro. Por exemplo: 360360 é dobrado mas 36036 não é. A quantidade de algarismo do bloco que define o número dobrado é o "comprimento" do número. Por exemplo: 204204 tem comprimento 3 e 45874587 tem comprimento 4. Encontre um número dobrado de comprimento 2 que seja um quadrado perfeito.

Você Sabia? O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais está contido em uma união (infinita) de intervalos abertos, cuja soma de seus comprimentos é tão pequena quanto se queira.

Outras Olimpíadas

Resultados de alunos de SC em outras Olimpíadas

Resultados na OBM

1999

Nível 01
Bruno Leonardo Scheneider (São José) - Medalha de Bronze
Felipe Paupitz Schlichting (Florianópolis) - Menção Honrosa

Nível 02
João Felipe Almeida Destri (Florianópolis) - Menção Honrosa

Nível 03
Giuliano Boava (Criciúma) - Medalha de Prata

2000

Nível 01
Guilherme Rohden Echelmeier (Itajaí) - Medalha de Ouro
Hanna Kirihara e Silva (Florianópolis) - Menção Honrosa

Nível 02
Lucas Lolli Savi (Florianópolis) - Menção Honrosa

2001

Nível 02
Felipe Paupitz Schlichting (Florianópolis) - Medalha de Bronze

Nível Universitário
Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Medalha de Bronze

2002

Nível 01
Tiago Madeira (Itajaí) - Menção Honrosa

Nível 02
Guilherme Rohden Echelmeier (Itajaí) - Medalha de Prata

Nível Universitário
Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Medalha de Bronze

Resultados em Olimpíadas Internacionais

2000

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Menção Honrosa na III Olimpíada Iberoamericana Universitária.

2001

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Menção Honrosa na IV Olimpíada Iberoamericana Universitária.

2002

Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Menção Honrosa na V Olimpíada Iberoamericana Universitária.

2003

Tiago Madeira (Itajaí) - Medalha de Bronze na IX Olimpíada de Maio.
Giuliano Boava (UFSC - Florianópolis) - Third Prize na X International Mathematical Competition for University Students.

Em 2003 o Brasil participou pela primeira vez da *International Mathematical Competition for University Students* com uma equipe formada por 8 estudantes de universidades brasileiras (3 alunos do ITA, 1 aluno da UFRJ, 1 aluno da UNICAMP, 2 alunos do IME e 1 aluno da UFSC).

O evento ocorreu no período de 25 a 31 de julho na Universidade Babes-Bolyai, em Cluj-Napoca (Romênia). O catarinense Giuliano Boava, da UFSC, ganhou um terceiro prêmio (Third Prize). Todos os brasileiros foram premiados (3 Second Prize, 3 Third Prize e 2 Honorable Mention).

Informações Gerais

Envio de Problemas e Soluções

A seção de problemas propostos e soluções é uma seção dinâmica.

Contribua propondo problemas e enviando-nos suas soluções de qualquer problema proposto. Os problemas não devem exigir, de preferência, conteúdos de matemática de nível universitário, porém podem ter soluções alternativas usando estes conteúdos.

Envio de Artigos

Professores do ensino fundamental e médio, professores universitários, bem como alunos de graduação e pós-graduação estão convidados a enviar seus artigos para a revista.

Artigos submetidos para publicação serão analisados pela comissão editorial. Os artigos devem abordar os temas de forma clara e não eminentemente técnica e não devem necessitar, como pré-requisitos, conhecimentos de matemática de nível universitário.

Não há exigência de um editor de texto em particular mas, caso o autor conheça e utilize o LaTeX, então o artigo poderá ser submetido neste formato.

Cadastramento

Diretores, coordenadores e professores de matemática que desejarem que seus alunos participem das olimpíadas (OBM e ORM) podem cadastrar suas escolas entrando no nosso site ou entrando em contato diretamente conosco (ver abaixo).

Alunos interessados em participar das olimpíadas de matemática podem consultar nosso site para verificar se a sua escola está cadastrada. Caso contrário, devem solicitar a seus professores de matemática que cadastrem a escola. Lembramos que as olimpíadas de matemática são feitas para os alunos, não sendo uma competição entre escolas. Assim sendo, espera-se que as escolas estimulem seus alunos a participar e que, no mínimo, apoiem aqueles alunos que assim o desejarem.

Como adquirir a revista

Esta revista está sendo distribuída gratuitamente a diversas escolas do estado de Santa Catarina (um exemplar por escola). Escolas que não receberam a revista podem nos solicitar o envio da mesma.

Fale Conosco

Entre em contato conosco para esclarecer sua dúvidas, dar sugestões ou fazer correções por:

– Nosso site: www.orm.mtm.ufsc.br
– Telefone/Fax: (48) 3316809 (PET - Matemática)
– e-mail: orm@pet.mtm.ufsc.br
– Endereço: PET - Matemática
Departamento de Matemática - CFM
UFSC
Campus Universitário - Trindade
88040-900 – Florianópolis/SC