UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PET MATEMÁTICA

# XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA

## Prova – 2ª fase – Nível 3

**1º de setembro de 2018**

### Preencha todos os itens, sem abreviações.

Nome completo:

Sua cidade:

Seu e-mail:

Seu telefone:

Nome da sua escola:

Cidade da sua escola:

### Instruções para a realização da prova

1. É proibido o uso de aparelhos eletrônicos.
2. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
3. A prova pode ser resolvida a lápis.
4. Resolva cada problema no espaço indicado para a sua resolução.
5. As páginas de rascunho não serão corrigidas.
6. Tudo o que você escrever deve ser justificado.
7. Cada problema vale 40 pontos. Serão considerados resultados parciais, portanto faça tudo o que souber de cada problema.
8. A duração da prova é de 4 horas. O tempo mínimo de permanência na sala é de 45 minutos.

### Assinale o tipo da sua instituição de ensino.

Instituição pública ☐ Instituição privada ☐

### Assinale o ano que frequenta.

1º ano ☐ 2º ano ☐ 3º ano ☐

**1.** Em uma gincana, 80 alunos de um colégio são divididos em sete equipes: A, B, C, D, E, F e G. As equipes A, B, C, D, E e F têm a mesma quantidade de alunos. O número de alunos da equipe G é maior do que 5 e menor do que o número de alunos da equipe B. Para uma prova dessa gincana, a comissão organizadora escolhe aleatoriamente duas das equipes acima e, em seguida, de forma aleatória e independente da escolha anterior, escolhe um aluno de cada uma delas. Sabendo que Paulinho está na equipe G, qual é a probabilidade de Paulinho participar dessa prova?

**Resolução do Problema 1**

## Resolução do Problema 1

**2.** Nicolas aguardava no ponto da Biblioteca Universitária um ônibus para voltar para a sua casa. Quando o ônibus chegou, felizmente estava sem passageiros. Nesta parada subiram no ônibus alguns passageiros juntamente com Nicolas. Nicolas percebeu que na próxima parada desceram do ônibus $\frac{3}{4}$ dos passageiros que nele estavam e, após isso, subiram no ônibus outros 7 passageiros. Na parada seguinte o mesmo ocorreu: desceram do ônibus $\frac{3}{4}$ dos passageiros que nele estavam e, após isso, subiram 7 outros passageiros. A próxima parada é a parada que Nicolas deve descer. Ao descer do ônibus Nicolas percebeu que neste ponto desceram novamente $\frac{3}{4}$ dos passageiros que estavam no ônibus. Sabe-se que o número de passageiros que embarcaram na Biblioteca é o mínimo possível. Determine quantos outros passageiros desceram do ônibus juntamente com Nicolas.

## Resolução do Problema 2

## Resolução do Problema 2

**3.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(3) = 8$ e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Calcule $f\left(\dfrac{2018}{5}\right)$.

**Resolução do Problema 3**

## Resolução do Problema 3

**4.** Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ tem-se que $\triangle n$ denota o número $n^n$, e $\boxed{n}$ denota o número dado por $n$ dentro de $n$ triângulos encaixados. Qual é o algarismo das unidades da raiz $\triangle 3$-ésima de $\boxed{3}$?

## Resolução do Problema 4

## Resolução do Problema 4

**5.** Seja $ABC$ um triângulo.

**(a)** Mostre que se $ABC$ é um triângulo equilátero, então para todo ponto interior $P$ do triângulo $ABC$ temos que $PA$, $PB$ e $PC$ são comprimentos dos lados de um triângulo.

**(b)** Mostre que se $ABC$ não é um triângulo equilátero, então existe um ponto interior $P$ do triângulo $ABC$ tal que $PA$, $PB$ e $PC$ não são comprimentos dos lados de um triângulo.

## Resolução do Problema 5

## Resolução do Problema 5

# Rascunho

# Rascunho

# Rascunho

# Rascunho

# Rascunho