UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da XII Prova da ORM - 2ª fase de 2009
Nível 1

---

1. **Amanda, Bianca, Cláudia, Carme, Danilo, Eliezer, Lício, Michely, Nereu e Virgínia são dez amigos que possuem pelo menos um gato em suas casas. Nenhum deles tem mais do que nove gatos. Sabe-se as somas dos gatos de algumas dessas pessoas, segundo as linhas e as colunas da tabela a seguir:**

	Danilo	Bianca	Cláudia	10
Nereu	Michely	Virgínia	Carmen	30
Eliezer	Amanda	Lício		21
13	13	24	11	

As quantidades de gatos das pessoas em cada linha ou em cada coluna são diferentes. Por exemplo, na primeira linha, Danilo, Bianca e Cláudia têm quantidades diferentes de gatos, cuja soma é igual a 10**, e na terceira coluna, Bianca, Virginía e Licio possuem quantidades diferentes de gatos, cuja soma é igual** 24**. Quantos gatos têm cada um deles?**

Solução:
Como as quantidades das pessoas em cada linha ou em cada coluna são diferentes, as somas máximas possíveis nas linhas ou colunas são:

$$\text{2 pessoas: } 9+8=17$$
$$\text{3 pessoas: } 9+8+7=24$$
$$\text{4 pessoas: } 9+8+7+6=30$$

Essas somas máximas são atingindas na segunda linha e na terceira coluna. Começando pela terceira coluna, temos que Bianca, Virgínia e Lício têm 9,8 ou 7 gatos, não se sabe ainda a ordem. Porém, Bianca só poderá ter 7 gatos pois, caso tivesse 8 gatos, então Danilo e Cláudia, ambos na primeira linha, teriam 1 gato cada, o que não pode ser. Caso Bianca tivesse 9 gatos, então ou Danilo ou Cláudia não teriam gatos, o que não pode ocorrer. Agora, se Bianca possui 7 gatos, então Danilo e Cláudia (na primeira linha) devem possuir 1 e 2 gatos, não nessa ordem possivelmente. Porém, se Cláudia possuisse 1 gato então Carmem deveria possuir 10 gatos (4ª coluna), o que não pode ser. Logo, Cláudia possui 2 gatos, Danilo possui 1 gato e Carmem possui 9 gatos. Segue-se que, como Carmem possui 9 gatos, Virgínia (3ª coluna) deve possuir 8 gatos e Lício possui 9 gatos. Na segunda coluna, temos que Danilo possui 1 gato, e portanto Michely e Amanda possuem juntas 12 gatos, o que nos dá as possibilidades: 9 e 3, 8 e 4, 7 e 5. Por outro lado, na segunda linha (que tem soma máxima), Carmem possui 9 gatos e Virgínia possui 8 gatos. Restam 13 gatos para Nereu e Michely, com as possibilidades: 7 e 6 (soma máxima). Portanto Michely só pode possuir 7 gatos, e daí Amanda possui 5 gatos. Segue-se que Nereu possui 6 gatos e Eliezer possui 7 gatos.

Resposta:
Amanda (5 gatos); Bianca (7 gatos); Cláudia (2 gatos); Carmem (9 gatos); Danilo (1 gato); Eliezer (7 gatos); Lício (9 gatos); Michely (7 gatos); Nereu (6 gatos); Virgínia (8 gatos).

2. **O traço de um número natural é a soma de seus algarismos. Por exemplo, o traço de** 51 **é** 6 **pois** $5+1=6$

a) **Quais são os números de dois algarismos cujo traço é o quadrado de um número inteiro?**

b) **Quais são todos os números, cujos algarismos são todos diferentes de zero, tais que seu traço é** 5**?**

Solução:

a) O menor traço possível de um número de dois algarismos é 1 (já que o menor número de dois algarismos é o 10) e o maior traço possível para um número de dois algarismos é o 18 (já que o maior número de dois algarismos é o 99). Os quadrados menores que 18 são: 1, 4 , 9 e 16.Basta então verificar quais números de dois algarismos tem traço igual a 1, 4, 9 ou 16.
Para 1 temos: 10.
Para 4 temos: 22, 40, 31 e 13.
Para 9 temos: 54, 45, 63, 36, 72, 27, 81, 18 e 90.
Para 16 temos: 88, 79 e 97.

Resposta:
Ao todo temos 17 números cujo o traço é um quadrado perfeito, que são: 10, 22, 40, 31, 13, 54, 45, 63, 36, 72, 27, 81, 18, 90, 88, 79 e 97.

b) Com cinco algarismos temos: 1111.
Com quatro algarismos temos: 2111, 1211, 1121 e 1112.
Com três algarismos temos: 113, 131, 311, 122, 212 e 221.
Com dois algarismos temos: 14, 41, 32 e 23.
Com um algarismo temos: 5.

Resposta:
Ao todo teremos 16 números cujo traço é 5, que são: 5, 14, 23, 32, 41, 113, 122, 131, 212, 221, 311, 1112, 1121, 1211, 2111 e 11111.

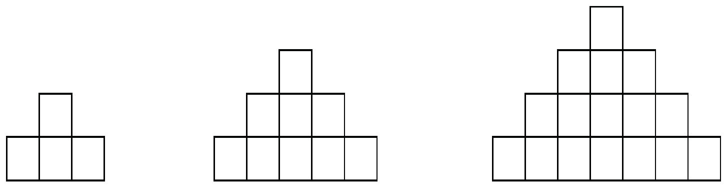
3. Encontre todos os números primos de dois algarismos cujo quadrado, diminuindo de 1, é divisível por 45.

Solução:
Para ser divisível por 45, um número deve ser divisível por 5 <u>e</u> por 9.
Todos os números divisíveis por 5 terminam em 5 ou em 0.
Se o quadrado de um primo menos 1 terminar em 5, então esse quadrado termina em 6 e não seria o quadrado de um primo porque seria o quadrado de um número par e o único número primo par é o número 2.
Logo, o quadrado do primo menos 1 termina em 0, e então o quadrado do primo deve terminar em 1.
Os números cujos quadrados terminam em 1 são aqueles que terminam em 1 ou em 9.

Então, consideremos os seguintes números primos de dois algarismos:
$11 \longrightarrow 11^2 = 121 \longrightarrow 121 - 1 = 120$. 120 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$*19 \longrightarrow 19^2 = 361 \longrightarrow 361 - 1 = 360$. 360 <u>é múltiplo de 9.</u>
$29 \longrightarrow 29^2 = 841 \longrightarrow 841 - 1 = 840$. 840 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$31 \longrightarrow 31^2 = 961 \longrightarrow 961 - 1 = 960$. 960 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$41 \longrightarrow 41^2 = 1681 \longrightarrow 1681 - 1 = 1680$. 1680 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$59 \longrightarrow 59^2 = 3481 \longrightarrow 3481 - 1 = 3480$. 3480 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$61 \longrightarrow 61^2 = 3721 \longrightarrow 3721 - 1 = 3720$. 3720 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$*71 \longrightarrow 71^2 = 5041 \longrightarrow 5041 - 1 = 5040$. 5040 <u>é múltiplo de 9.</u>
$79 \longrightarrow 79^2 = 6241 \longrightarrow 6241 - 1 = 6240$. 6240 <u>não</u> é múltiplo de 9.
$*89 \longrightarrow 89^2 = 7921 \longrightarrow 7921 - 1 = 7920$. 7920 <u>é múltiplo de 9.</u>

Resposta:
Os números primos de dois algarismos cujo quadrado diminuindo 1 é divisível por 45 são 19, 71 e 89.

4. **Quadrados de lado 1 são empilhados formand sucessivamente figuras com 3 quadrados na base, 5 quadrados na base, 7 quadrados na base, e assim por diante.**

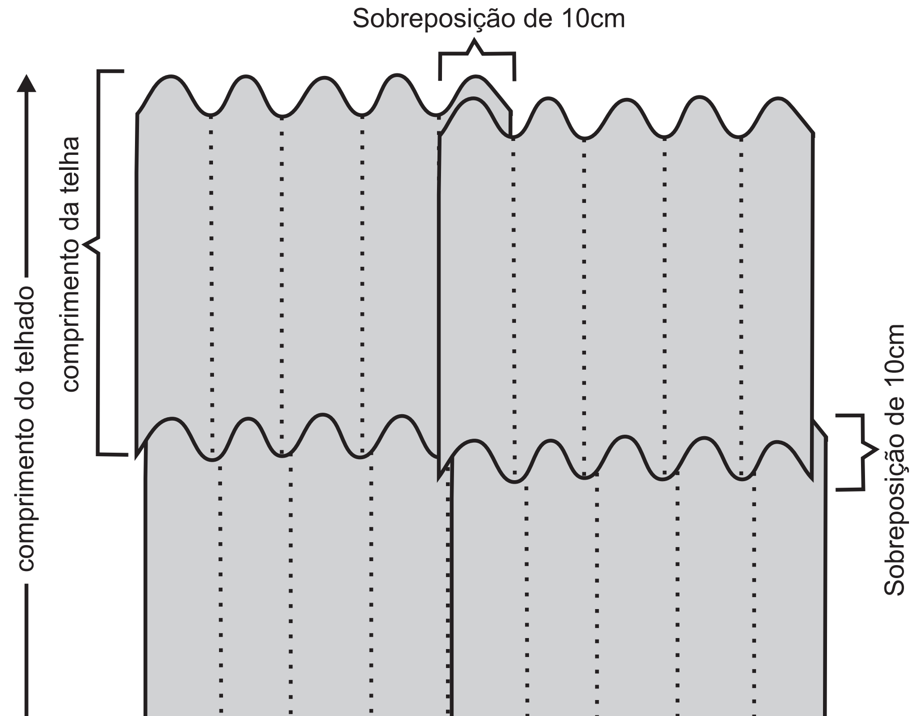


Calcule o perímetro da figura que tem 2009 quadrados em sua base.
(Observação: o perímetro de uma figura é o comprimento da linha que delimita a figura. Por exemplo, a primeira figura acima tem perímetro 10 e a segunda tem perímetro 16).

Solução:
Reparar que a soma dos segmentos horizontais é igual a duas vezes o comprimento máximo horizontal (base), e que a soma dos segmentos verticais é igual a duas vezes a altura máxima. A altura máxima é igual à base mais 1 sobre 2.Por exemplo, na primeira figura é $\frac{3+1}{2} = 2$, na segunda é $\frac{5+1}{2} = 3$ e na terceira é $\frac{7+1}{2} = 4$. Assim, na figura que tem 2009 quadrados na base, a altura é $\frac{2009+1}{2} = 1005$.

Resposta:
O perímetro é: $2 \times 2009 + 2 \times 1005 = 4018 + 2010 = 6028$.

5. **O Sr. Tejado pretende construir um telhado retangular de 3m de comprimento por 10m de largura. Uma loja vende três tipos de telhas, T_1, T_2 e T_3, todas com 1 metro de largura e comprimentos de 1 metro, 60 centímetros e 40 centímetros, respectivamente. Os três tipos de telhas podem ser usados para cobrir o telhado (não é necessário usar apenas um tipo de telha), no entanto, quaisquer duas telhas vizinhas devem ser sobrepostas por 10cm (conforme exemplo com um telhado de 4 telhas). Além disso, qualquer fileira de telhas ao longo da largura deve ser formada por telhas de mesmo tipo, sendo permitida a variação de tipo ao longo do comprimento.**



a) **Dê um exemplo de como cobrir o telhado (quantas telhas de cada tipo) sem que sobrem ou faltem telhas.**

b) **Com quantas combinações de telhas é possível cobrir o telhado (sem sobrar nem faltar telhas)?**

Solução:
Como Todas as telhas têm $1m$ de largura e como há a sobreposição de $10cm$ serão necessárias 11 telhas em cada fileira ao longo da largura (podemos considerar 1 telha de $1m = 100cm$ e mais 10 telhas de $90cm$ - devido à sobreposição - totalizando uma largura de $100cm + 10 \times 90cm = 1000cm = 10m$) Para o comprimento consideramos a primeira telha como sendo a maior e as seguintes do mesmo comprimento ou menor, diminuídas de $10cm$ cada.

a) Assim, um exemplo possível, ao longo do comprimento será:

2 telhas de $1m = 100cm \rightarrow 100cm + 90cm$ restando $110cm$ para serem cobertos. Ora, $110cm$ não é múltiplo de $50cm$ (correspondente a uma telha T_2, de $60cm$, menos $10cm$) nem é múltiplo de $30cm$ (correspondente a uma telha T_3, de $40cm$, menos $10cm$). Portanto, para cobrir os $110cm$ faltantes podemos ter: $50cm + 60cm = 50cm + 2 \times 30cm$, ou seja, 1 telha T_2 2 telhas T_3

Resposta:
Ao longo do comprimento, teríamos, $2T_1$,$1T_2$ e $2T_3$. No total seriam:
$2 \times 11 = 22$ telhas T_1, $1 \times 11 = 11$ telhas T_2 e $2 \times 11 = 22$ telhas T_3, para cobrir o telhado.

b) Além da possibilidade em (a), temos para o comprimento:
b_1) $1T_1 \rightarrow 100cm$ (restam $200cm$)
$4T_2 \rightarrow 4 \times 50 = 200cm$
b_2) $1T_1 \rightarrow 100cm$ (restam $200cm$)
$1T_2 \rightarrow 50cm$ (restam $150cm$)
$5T_3 \rightarrow 5 \times 30 = 150cm$
b_3) $1T_2 \rightarrow 60cm$ (restam $240cm$)
$3T_2 \rightarrow 3 \times 50cm$ (restam $90cm$)
$3T_3 \rightarrow 3 \times 30 = 90cm$
b_4) $1T_2 \rightarrow 60cm$ (restam $240cm$)
$8T_3 \rightarrow 8 \times 30cm = 240cm$
Não é possível cobrir o telhado só com telhas T_3.

Resposta:
No total, são 5 combinações de telhas, a menos de ordem em que são usadas ao longo do comprimento.

b_1) Nos dá: 11 telhas T_1 mais 44 telhas T_2.
b_2) Nos dá: 11 telhas T_1, mais 11 telhas T_2 mais 55 telhas T_3.
b_3) Nos dá: 44 telhas T_2 mais 33 telhas T_3.
b_4) Nos dá: 11 telhas T_2 mais 88 telhas T_3.