**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**
**X OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA**
**PET – MATEMÁTICA**

---

## Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2007
## Nível 2

---

1. Tomando $y = 1$ teremos:

$$f(x \cdot f(1)) = x \cdot f(f(1)), \text{ ou}$$
$$f(7x) = x \cdot f(7), \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_+^*$$

Tomando agora $x = \dfrac{1}{7}$ obtemos:

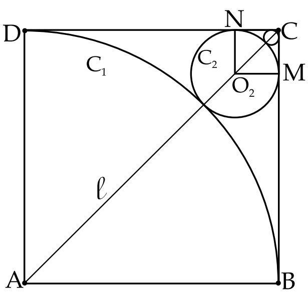
$$f\left(7 \cdot \tfrac{1}{7}\right) = \tfrac{1}{7} f(7), \text{ ou}$$
$$7 = f(1) = \tfrac{1}{7} f(7), \text{ ou}$$
$$f(7) = 49$$

Fazendo agora $x = \frac{2007}{7}$ obtemos:

$$f\left(7 \cdot \tfrac{2007}{7}\right) = \tfrac{2007}{7} f(7), \text{ ou}$$
$$f(2007) = \tfrac{2007}{7} \cdot 49 = 2007 \cdot 7$$

Então $f(2007) = 14049$.

2. Vamos calcular inicialmente o raio $R_2$ da circunferência $C_2$. Observe que o raio da circunferência $C_1$ é $l$.




Seja $O_2$ o centro de $C_2$ e $P$ o ponto de tangência de $C_1$ e $C_2$. Então:

$$AP = l,\ PO_2 = R_2 \quad \text{e} \quad O_2C = R_2\sqrt{2},$$

pois $O_2$ e $C$ são vértices opostos de um quadrado $O_2MCN$ de lado $R_2$.

Assim:

$$l\sqrt{2} = AC = AP + PO_2 + O_2C = l + R_2 + R_2\sqrt{2}, \text{ ou}$$
$$R_2(\sqrt{2} + 1) = l(\sqrt{2} - 1), \text{ ou}$$
$$R_2 = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1} = l(\sqrt{2} - 1)^2$$

Para calcularmos $R_3$ procedemos de forma análoga considerando agora o quadrado $O_2MCN$ de lado $R_2$ e obtemos:

$$R_3 = R_2(\sqrt{2}-1)^2 = l(\sqrt{2}-1)^4 = l((\sqrt{2}-1)^2)^{3-1}$$

Por indução, obtemos $R_n = l(\sqrt{2}-1)^{2n-2}$, para $C_n$.

Segue-se que a área $A_n$ de $C_n$ é:

$$A_n = \pi l^2(\sqrt{2}-1)^{4n-4}$$

3. Vamos provar por indução sobre as linhas. A afirmação é verdadeira na linha 2 (e na 1), onde começou o processo.

   Suponha que ela seja verdadeira para quaisquer duas frações vizinhas da linha $n$.

   Tomemos então duas fraçoes vizinhas da linha $n+1$. Elas serão da forma $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_n+r_n}{q_n+s_n}$, ou $\dfrac{p_n+r_n}{q_n+s_n}$ e $\dfrac{r_n}{s_n}$, sendo $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{r_n}{s_n}$ duas frações vizinhas da linha $n$. Pela hipótese de indução vale: $p_n s_n - q_n r_n = -1$. Então, no caso das funções vizinhas $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_n+r_n}{q_n+s_n}$, obtemos:

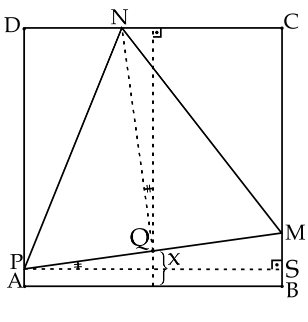
$$p_n(q_n+s_n) - q_n(p_n+r_n) = p_n s_n - q_n r_n = -1.$$

   Da mesma forma, no caso das outras duas frações vizinhas, obtemos o valor $-1$. Portanto, a afirmação é válida para a linha $n+1$.

4. Suponhamos que exista de fato um triângulo eqüilatero $\triangle PMN$ inscrito no quadrado. Embora o desenho sugira a inclinação do lado $PM$ em relação ao lado $AB$ do quadrado, não sabemos se esta é a posição real do triângulo. De qualquer forma, admitiremos que o triângulo $\triangle PMN$ tenha vértice $M$ no lado $BC$ e o vértice $N$ no lado $CD$ do quadrado.

   Seja $Q$ o ponto médio do lado $PM$ do triângulo, e seja $QR$ perpendicular ao lado $CD$ do quadrado, com $R$ em $CD$.

   Vejamos inicialmente que $R$ não pode ser $N$ pois, caso contrário, $PM$ seria paralelo a $CD$ e teriamos $QR = \frac{PM\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por outro lado, $QR = 1 - AP = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Mas $\frac{7}{8} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (pois, $\frac{49}{64} > \frac{3}{4} \Leftrightarrow 49 > 48$). Logo, $R$ é distinto de $N$.




   Considere agora $PS$ perpendicular ao lado $BC$ do quadrado, com $S$ em $BC$. Seja $x$ a distância do ponto $Q$ ao lado $AB$ do quadrado. Então $M\widehat{P}S = N\widehat{Q}R$, pois estes ângulos têm os lados respectivamente perpendiculares e são agudos. Segue-se que os triângulos retângulos $\triangle MPS$ e $\triangle NQR$ são semelhantes, e daí:

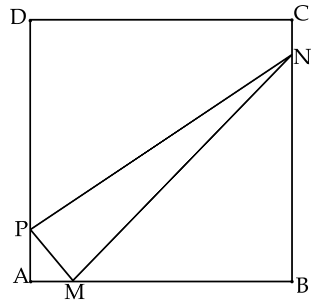
$$\frac{PM}{QN} = \frac{PS}{RQ}, \text{ ou } \quad \frac{l}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{1-x} \quad (l \text{ é o lado do triângulo})$$

   Segue-se que $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$(note que $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{8}$), e portanto a inclinação de $PM$ na figura está correta. Agora temos: $MS = 2(x - \frac{1}{8}) = 2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}) = \frac{7}{4} - \sqrt{3}$. Então: $l^2 = MS^2 + PS^2$, ou $l^2 = (\frac{7}{4} - \sqrt{3})^2 + 1 = \frac{113}{16} - \frac{7\sqrt{3}}{2}$. Daí: $l = \frac{1}{4}\sqrt{113 - 56\sqrt{3}}$.

   Outra configuração não é possível:

   I) Se $M$ estivesse em $AB$:

      I.1) $N$ não poderia estar em $BC$, pois para que isso acontecesse $AM < \frac{1}{8}$ e, neste caso, $PM$ seria menor que a distância de $P$ ao lado $BC$.




I.2) Se $N$ permanecesse em $CD$ então, no caso limítrofe em que $M$ fosse $B$, teríamos $PN > PM$ e, para $PM < PB$ teríamos $PN$ maior ainda.

II) Se $M$ estivesse mesmo em $CD$ e $N$ em $AD$, teríamos uma situção análoga ao caso I.2.

Portanto só há uma configuração possível para o triângulo com $P$ dado tal que $AP = \frac{1}{8}$.

5. Dentre todos os números possíveis, o dígito 1 aparecerá 8! vezes na casa da unidade (basta fixar 1 e permutar os outros 8 algarismos). Idem para todos os outros dígitos.

   A soma dos algarismos, de todos os números, em qualquer uma das casas será:

$$8!(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 8!45$$

   Assim, a soma de todos os números será:

$$\begin{gathered} 8!45.1 + 8!45.10 + 8!45.10^2 + \cdots + 8!45.10^8 \\ 8!45(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^8) = 8!45.111111111, \end{gathered}$$

   e portanto esta soma é um múltiplo de 111111111.