



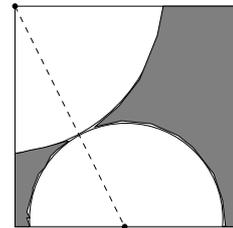
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
IX OLIMPIÁDA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA**



**Prova 2ª fase de 2006
Nível 3**

1. Dois recipientes cilíndricos, A e B , de raios r_A e r_B respectivamente, contêm água até a mesma altura. Se metade da água de A for passada para B , cria-se uma diferença de 10 cm entre os novos níveis em A e B . Além disso, se na situação inicial a metade da água de B for passada para A , a diferença entre os níveis passa a ser de 40 cm. Determine o quociente $\frac{r_A}{r_B}$.

2. Em um quadrado de lado 40 cm são traçados dois arcos de circunferência, um deles com centro no ponto médio de um dos lados desse quadrado, e o outro com centro em um dos vértices do lado oposto àquele lado (veja figura ao lado). Sabendo-se que os dois arcos são tangentes, que o raio do arco de circunferência inferior é menor ou igual a 20 cm, e o arco superior tem raio menor ou igual a 40 cm, calcule as medidas desses raios de modo que a área sobreada seja máxima.



3. Sejam m e n dois inteiros positivos tais que $m < n$. Prove que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n}$$

não pode ser um número inteiro. (Sugestão: Tente argumentar que esta soma é uma fração que, na forma irredutível, tem numerador ímpar e denominador par).

4. Seja o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ satisfazendo a propriedade

$$P(x+1) - P(x) = x^2, \text{ para todo } x.$$

Calcule os coeficientes a , b e c .

Use a propriedade acima para calcular a soma

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2,$$

em função de n .

5. Considere a seqüência numérica:

26,
2006,
202606,
20200606,
.....

cujos primeiros números são iguais a 26 e onde são introduzidos, para os números seguintes, alternadamente dois zeros entre os algarismos 2 e 6 centrais, e 26 entre os dois algarismos zero centrais. Acima estão os quatro primeiros números dessa seqüência.

Calcule a soma de todos os algarismos de todos os números, do primeiro até o n -ésimo número (o número que está na posição n) dessa seqüência, em função de n .