



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA



Prova 2ª fase de 2004
Nível 2

1. A sociedade kardaliana usava um sistema posicional com apenas quatro algarismos distintos para representar os números naturais: \leftarrow , \rightarrow , \uparrow e \downarrow . Eles desenvolveram as operações de adição e multiplicação e descobriram que as operações que envolvem somente adição ou multiplicação podiam ser reordenadas ou agrupadas de qualquer modo sem alterar o resultado (propriedades associativa e comutativa) e que a multiplicação distribuía sobre a adição ($x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$). Os valores básicos das operações são dados abaixo:

+	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\leftarrow	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\rightarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow	$\rightarrow\leftarrow$
\uparrow	\uparrow	\downarrow	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$
\downarrow	\downarrow	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$	$\rightarrow\uparrow$

\times	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow
\rightarrow	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\uparrow	\leftarrow	\uparrow	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\uparrow$
\downarrow	\leftarrow	\downarrow	$\rightarrow\uparrow$	$\uparrow\rightarrow$

- (a) Qual é a representação no sistema kardaliano para o nosso ‘0’ e para o nosso ‘1’?
 (b) Qual é o primeiro número que é representado com dois dígitos? E com três dígitos?
 (c) Qual é a relação entre os dois números do item (b)?
 (d) Represente o valor da seguinte expressão no sistema kardaliano: $(\rightarrow\downarrow \times \uparrow\leftarrow) + \downarrow\rightarrow\uparrow$.
2. Considere a “máquina de transformar números”, que funciona conforme as seguintes regras:
- (a) recebe um número e remove seu primeiro algarismo, guardando o número resultante;
 (b) pega o resultado de (a), inverte a ordem dos seus algarismos e guarda o número;
 (c) soma os algarismos do número gerado em (b) e anexa a soma ao lado direito do número;
 (d) mostra o resultado final.

Exemplos: • $9987 \rightarrow 987 \rightarrow 789 \rightarrow 78924$.
 • $1023 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 325$.

ALERTA! No sistema posicional de representação de números, não se permite o algarismo ‘0’ no lado esquerdo da representação.

Ache um número de cinco algarismos que não é alterado por esta “máquina”. Há outro?

3. Encontre primos p e q tais que $167p + q = 2004$.
4. Numa sala há doze caixas, de mesma aparência externa, contendo barras de ouro. Cada barra de ouro pesa 1kg. Sabe-se que nenhuma caixa está vazia. As caixas são repartidas em quatro grupos de três caixas cada e, ao serem pesados, verifica-se que a totalidade de ouro em cada grupo é de 7kg. Em seguida, as caixas são repartidas em três grupos de quatro caixas cada, e, ao serem pesados, verifica-se que há um grupo com 18kg de ouro, um com 4kg e o terceiro com 6kg.
- Qual é a maior quantidade de barras de ouro que está colocada em uma caixa? Quais são as possíveis distribuições das barras nas caixas?
5. O Sr. Silva saiu de Eldorado e chegou em Shangrilá em 3 de agosto de 1845 no navio *Estrela do Leste*, o único que serve Shangrilá e que por lá passa a cada vinte e sete dias. O Sr. Silva trabalhou em Shangrilá até 17 de julho de 1849, inclusive, tirou férias e viajou de diligência na manhã do dia seguinte para a Terra do Sonho. A viagem entre essas duas cidades dura setenta e duas horas. Sabemos que o navio sempre chega em Shangrilá de manhã cedo e parte no final da tarde do mesmo dia, e que há duas diligências diárias da Terra do Sonho para Shangrilá, uma partindo às oito e outra às vinte horas. Após permanecer dez dias na Terra do Sonho, em que dia o Sr. Silva deve partir de volta para Shangrilá para pegar o primeiro navio disponível para voltar a Eldorado, considerando que ele quer permanecer o maior tempo possível na Terra do Sonho?